1932 № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION
Ф. Ю. Левинсон-Лессинг. Ф. И. Беккe. Некролог. ИМЕН, 1932, № 2, стр. 117.
Fr. Loewinson-Lessing. F. J. Becke. Notice nécrologique. BAS-MN, 1932, № 2, p. 117 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Март 1932 г.

Непременный Секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров
Ученый корректор Г. А. Стратановский

Сдано в набор в январе 1932 г. — Подписано к печати 23 марта 1932 г.

169 (117—285) стр. (19 фиг.) — 72 × 110 см. — $10^{7}/_{8}$ печ. л. —
42000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 1300
Ленгорлит № 35041. — АНИ № 89. — Заказ № 469
Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Ф. И. БЕККЕ (F. BECKE)

НЕКРОЛОГ

Составлен академиком Ф. Ю. Левинсон-Лессингом

Скончавшийся летом 1931 г. в возрасте 75 лет б. профессор Венского университета Фридрих Иоганн Бекке, член-корреспондент нашей Академии с 1912 г. и член Венской Академии Наук, был одним из наиболее широко известных и популярных петрографов последних десятилетий. Этим он был обязан не только тому обстоятельству, что он в течение 40 лет, вплоть до самой смерти, редактировал известный периодический орган по минералогии и петрографии, созданный Чермаком «Tschermak's Mineralogische und Petrographische Mitteilungen» и начиная с 1890 г. перешедший в ведение Бекке, но и крупным научным заслугам.

В Бекке счастливо сочетались минералог с кристаллофизическим уклоном, полевой геолог и прекрасный микроскопист, не только владеющий всеми известными методами исследования, но создающий новые методы, ищущий новых путей, и вдумчивый петрограф-мыслитель, идущий по пути обобщений в области петрогенезиса.

Профессорская деятельность Бекке началась в Черновицах и Праге, откуда он в 1898 г. перешел в Вену, где она и протекала бессменно до его семидесятилетия; и хотя его лаборатория не представляла такого широко используемого иностранцами центра как институты Розенбуша в Гейдельберге или Циркеля в Лейпциге, она все же привлекала не только австрийцев, но и иностранцев, стремившихся в особенности к усвоению новых методов самого Бекке, в том числе и русских, из которых можно назвать Баклунда, Б. Попова, Лучицкого, Аршинова, Висконта и др. Преподавательская деятельность Бекке не замыкалась в рамки занятий со студентами и специалистами; он охотно делился своими знаниями и с широкими массами;

в этом отношении следует отметить его деятельное участие как в организации, так и в работе того особого типа распространения научных знаний в виде циклов систематических лекций, который был создан Венским университетом, а за ним и некоторыми другими австрийскими университетами под названием «Volkstümliche Hochschulkurse».

Ф. И. Бекке, сын книгопродавца, родился в Праге в 1856 г., скончался в Вене в 1931 г. Образование получил в Венском университете, был ассистентом у Чермака в Венском университете, с 1882 г. профессором в Черновицах, с 1890 г. в Праге, а в 1898 г. перешел в Вену преемником сначала Шрауфа, затем Чермака, по кафедре минералогии и петрографии. В Венской Академии Наук он в течение ряда лет занимал должность непременного секретаря. Профессуру Бекке оставил в 1927 г., но продолжал научно работать почти вплоть до самой своей смерти.

Многочисленные работы Бекке, не считая описательных работ по минералогии, петрографии и геологической съемке, группируются около следующих проблем: кристаллографическое и кристаллофизическое изучение отдельных минералов; структура, минералогический, химический состав и генезис метаморфических пород; методы петрографического исследования; вопросы петрогенезиса изверженных пород (петрографические провинции, классификация и др.).

Первые работы Бекке относились к первой из названных проблем. К исследованию отдельных минералов Бекке возвращался и впоследствии, в особенности в связи с изучением наиболее важной группы породообразующих минералов, т. е. полевых шпатов. Из интересных и не утративших своего значения и до сих пор работ можно указать на применение вытравления к изучению симметрии кристаллов, имеющее важное значение например для кристаллов кубической системы, на установление триклинического характера шабазита, на его работу о доломите, в которой он стремится дать стереохимическое объяснение тому понижению симметрии, по сравнению с их компонентами, которые обнаруживают, в отличие от изоморфных смесей, двойные соли. К стереохимическим представлениям Бекке подходит и в работах о группе магнетита и пирита: различные реактивы различно действуют на разные грани; отсюда он делает заключение, что металлические атомы в пирите расположены у граней куба, а атомы серы у граней ромбического додекаэдра. В работе об изоморфизме полевых шпатов Бекке делает попытку объяснить некоторые уклонения физических свойств этих изоморфных смесей от чистой аддитивности некоторым изменением физических свойств компонентов при образовании смешанных кристаллов. К полевым

шпатам и к уточнению оптических констант некоторых из них он возвращается неоднократно в связи с разрабатываемыми им новыми методами кристаллооптического их определения и с особенностями метаморфических пород. Изучение кристаллической формы тростникового сахара, который казался исключением из установленной Пастером приуроченности вращения плоскости поляризации к энантиоморфизму, подтверждает правильность Пастеровского положения.

В большой работе о вытравлении плавикового шпата он выясняет различие скорости растворения в разных направлениях и из явлений вытравления выводит объяснение, почему одни грани развиваются, а другие отсутствуют. По словам реферировавшего эту работу Браунса она открывает новые горизонты. Большое внимание было уделено Бекке зональному строению полевых шпатов. Им установлено, что в кристаллических сланцах не выдерживается тот общий тип зонального строения полевых шпатов в изверженных породах, при котором наблюдается обогащение альбитовой частицей по мере перехода от ядра и внутренних зон к наружным. В этом, как известно, сказывается общий закон кристаллизации изоморфных смесей, установленный Кюстером и Коноваловым и заключающийся в том, что первые порции изоморфных зональных кристаллов богаче более тугоплавким компонентом, т. е. тем, который повышает точку плавления изоморфной смеси. Бекке точными кристаллооптическими измерениями проследил эту закономерность зональности не только на полевых шпатах, но и в пироксенах и других изоморфных породообразующих силикатах и правильно отметил, что эти соотношения определяются условиями растворимости.

Нельзя не отметить и его работы по росту кристаллов, где он устанавливает понятие о конусах наростания (Anwachskegel), работы о мирмеките, образование которого он объясняет процессом вытеснения калия натрием и кальцием в калиевом полевом шпате, работу о взаимоотношениях пироксена и амфибола и некоторых др.

Работы Бекке по методам определения полевых шпатов и по петрографической методике занимают почетное место не только среди работ самого Бекке, но и в петрографической литературе вообще. И если даже некоторые из данных Бекке методов и утратили свое значение, достаточно одной так называемой «линии», или как некоторые говорят «полоски» Бекке, которую теперь знает каждый студент петрограф или минералог, чтобы его имя продолжало жить еще очень долго.

Методы кристаллооптического определения под микроскопом минералов и в частности полевых шпатов, разработанные Бекке, отличаются ориги-

нальностью и изяществом. Но вместе с тем некоторые из них не получили широкого распространения или потому, что требуют особого рисовального столика и большого напряжения внимания, как например определение угла оптических осей по изгибам одной из изогир в тех интерференционных лемнискатах, которые дают двуосные кристаллы при скрещенных николях в сходящемся свете, или потому, что применимы лишь к особым случаям, как например изящный метод определения полевых шпатов путем сравнения показателей преломления полевых шпатов с показателем преломления кварца в местах их контактов. Этот последний метод очень изящен, но он применим только к породам, содержащим кварц и притом в таком количестве, чтобы было достаточно шансов на нахождения в одном шлифе необходимого количества требуемых контактов.

Впрочем эти методы Бекке, как и многие другие коноскопические методы, отошли на задний план перед вытесняющим их Федоровским методом как таковым или применением Федоровского столика к определению углов погасания в некоторых определенных разрезах. Линия, или полоска, Бекке, т. е. та светлая полоска, которая получается на границе двух средин с различными показателями преломления при — подымании тубуса микроскопа установленного предварительно на фокус, на стороне тела с бо́льшим показателем преломления, а при опускании на стороне тела с меньшим показателем преломления — широко применяется как для определения преломления тела по сравнению с преломлением соприкасающегося с ним другого тела в шлифе (например полевого шпата и кварца, полевого шпата и канадского бальзама и др.), так и для точного количественного определения показателя преломления минерального тела, погружаемого последовательно в жидкости, показатели преломления коих известны. Это так называемый иммерзионный метод (Шредер-фон-дер-Кольк), который получил в упрощенном виде при помощи полосок Бекке широкое применение как в петрографии изверженных пород, так в особенности в сравнительной литологии осадочных пород, где этим методом определяются минеральные частицы диаметром в несколько сотых и даже несколько тысячных миллиметра. Такое определение имеет и практическое значение для характеристики и отождествления по минералогическому составу разных стратиграфических горизонтов некоторых геологических свит, например нефтеносных.

Так называемые скиодромы Бекке, т. е. ортогональные проекции элипсоида скоростей на плоскость препарата в сходящемся свете, и ряд соответствующих гипсовых моделей имели своей целью сделать более наглядными и соответственно облегчить их понимание сложные кристалло-

оптические явления в коноскопе, особенно для распознавания одноосных и двуосных кристаллов и характера двупреломления; они находят себе применение в преподавании кристаллооптической петрографической методики.

Много сделано Бекке для более полного и тонкого познания полевых шпатов, этой наиболее важной группы породообразующих минералов; и в методику определения полевых шпатов и в их оптические константы, и в закономерности их зонального строения Бекке внесено много нового.

К методологическим работам относится также метод окрашивания для распознавания кварца и полевого шпата в шлифах и новый метод графического изображения химизма изверженных пород (в работе о породах с о. Колумбрет) и метаморфических пород. К графическим методам изображения состава горных пород он возвращается и впоследствии и даже еще в обзорной работе 1927 г.

Наряду с методологическими работами наиболее важными являются и работы Бекке в области метаморфических пород. Он сравнительно рано изучал в поле, а затем и в лаборатории, метаморфические и изверженные породы венского Вальдфиртеля и его внимание оказалось сразу (уже в 1882 г.) направленным от чисто геологического и петрографически описательного их изучения в сторону постановки и разрешения проблем петрологического порядка.

Особенности структуры, текстуры и минералогического состава кристаллических сланцев интересуют Бекке не сами по себе, а как отражение тех термодинамических и физикохимических условий, в которых происходила метаморфизация данной породы или свиты пород. Температура, давление, химическая обстановка различны на различных глубинах в земной коре, куда под влиянием дислокационных процессов и седиментации постепенно погружаются горные породы, находившиеся на поверхности; в зависимости от комбинации названных трех факторов процессы метаморфизации будут на разных глубинах протекать различно: один и тот же материал, оставаясь химически более или менее неизменным, будет приобретать различные структурные признаки и различный минералогический состав, характерные именно для данной комбинации термодинамических условий, для данной глубинной зоны, в которой происходит метаморфизация. Горная порода не представляет неизменной системы, которая разрушается лишь на поверхности. Она является некоторой равновесной при данных условиях генезиса системой; но как только она попадает в другие условия, это равновесие нарушается и горная порода либо подвергается разрушению,

т. е. так называемому выветриванию, либо тому или иному виду метаморфизации. Всякая горная порода, при изменении условий ее существования, более или менее глубоко изменяется, превращается в другую или другие породы. Эти представления в общем виде были формулированы еще одним из родоначальников современной геологии, Хёттоном в начале прошлого столетия, но они были облечены в научную форму, конкретизированы и систематизированы в значительной степени теми работами, которые велись Бекке по инициативе Венской Академии Наук, т. е. вероятно самого Бекке, в сотрудничестве с другим венским профессором — Бервертом и с цюрихским профессором Грубенманом, и независимо от них более или менее одновременно американцем Ван-Хайзом и финляндцем Седергольмом. Это учение о метаморфизме, известное под названием учения о глубинных зонах метаморфизации, связано с именами названных ученых, но львиная доля в этом учении принадлежит Бекке. Об этом свидетельствует его доклад на Венском международном геологическом конгрессе и появившаяся в этом же году его работа в изданиях Венской Академии, хотя он и говорит сам, что все это сделано работами, организованными Венской Академией, является достоянием всех трех авторов, т. е. Бекке, Берверта и Грубенмана, и несмотря на то, что эти представления о зонах метаморфизации чаще связывают с именем Ван-Хайза и в особенности Грубенмана, которому принадлежит первое сводное сочинение о кристаллических сланцах, основанное на этих новых представлениях.

Нельзя для правильного исторического освещения этого нового направления о метаморфизме не отметить, что одновременно с названными учеными, но совершенно независимо от них к этим же представлениям пришел Лукашевич во время своего 18-летнего заключения в Шлиссельбургской крепости. Книга Лукашевича «Жизнь горных пород» вышла в свет позднее работ Ван-Хайза, Бекке, Грубенмана, хотя изложенные в ней мысли созрели ранее. Мы имеем здесь пример не раз имевшего место в истории развития науки, одновременного, независимо друг от друга, формулирования научных идей или даже решения проблем экспериментальным путем (вспомним хотя бы сжижение газов одновременно Пиктэ и Кальетэ). Вместе с тем, это удивительный пример научного творчества в условиях заточения, принудительной изолированности от внешнего мира.

На фоне общих положений Ван-Хайза, Седергольма, Лукашевича рельефно выделяются конкретизированные и освещенные физикохимически представления Бекке, а с ним или отчасти за ним Грубенмана. Для объяснения особенностей структуры и минералогического состава метаморфических

пород, Бекке прибегает главным образом к двум положениям: к так называемому закону объемов (название самого Бекке) и к принципу Рикке. Закон объемов заключается в том, что метаморфизация на более или менее значительной глубине должна регулироваться и сопровождаться стремлением к сокращению объема. И действительно мы видим, что метаморфические породы обладают большей плотностью, чем те первоначальные породы, из которых они получились, что минералы, которые получаются за счет других при метаморфизме, занимают меньший молекулярный объем, чем исходные минералы. Бекке дает большой ряд данных для иллюстрации этого положения и эту мысль он высказал еще раньше по поводу процессов динамометаморфизма и старался выразить эти изменения объемов уравнениями; до него ту же мысль высказал уже Лепсиус (1890 и 1893). В основе мысль, формулированная в форме закона объема, верна, но на самом деле явление здесь более сложного порядка. Достаточно вспомнить, что мною еще в 1898 г. было показано, что минералы, слагающие изверженные породы, делятся на две группы, из которых одна образуется с сокращением объема, а другая с расширением; а к этой второй группе принадлежат полевые шпаты, входящие также и в состав кристаллических сланцев.

Положение Рикке заключается в том, что если кристалл, находящийся в соприкосновении с насыщенным его раствором, находится под односторонним давлением, он будет растворяться в направлении давления и наростать в плоскости перпендикулярной: растворимость повышается в направлении давления независимо от того, сопровождается ли плавление расширением или сокращением. Бекке придает этому явлению большую роль в процессах кристаллизации составных частей кристаллических сланцев в твердом состоянии, при чем отмечает, что необходимая для этого вода имеется в горной породе в виде горной влаги. В результате возникает особая кристаллизационная сланцеватость (Kristallisationsschieferung). В связи с этим Бекке разбирает и вопрос об определении направления растяжения или растянутости (Streckung) в метаморфизованных горных породах; это явление как известно, играет большую роль, и в позднейших построениях Клооса в его так называемой гранитовой тектонике.

В процессе глубинного метаморфизма горные породы, перекристаллизовываются, прежние структуры более или менее полно заменяются новыми. Эти последние существенно отличаются от первичных кристаллизационных структур тем, что они возникают в процессе перекристаллизации в твердом состоянии со всеми вытекающими отсюда последствиями. Эти вторичные

структуры необходимо отметить особым названием; Бекке называет их кристаллобластическими и вся современная терминология этих кристаллобластических структур (гранобластическая, бластопорфировая, идиобласты, порфиробласты и т. д.), вошедшая во всеобщее употребление, введена Бекке, а за ним и Грубенманом.

Большое внимание уделено Бекке минералогическому составу метаформических пород, к определению которого он подходит также тщательно во всеоружии тонких кристаллооптических методов, как это полагается для изверженных пород, но не всегда применялось к породам метаморфическим. Он дает картину приуроченности тех или иных минеральных ассоциаций к определенным зонам метаморфизации и вводит понятие и термин типоморфных минералов для обозначения тех, которые типичны для данной зоны метаморфизации, а не являются остатками более раннего минералогического состава или позднейшими новообразованиями. Не оставлен без внимания и химический состав, для изображения которого он дает особые обозначения и графическое изображение. Особый тип графического изображения был им предложен и для химического состава изверженных пород.

В развитие правильного представления о том, что горная порода является известной равновесной системой для данной термодинамической обстановки и должна изменяться с изменением этой обстановки, надо было логически остановиться не только на тех изменениях, которые претерпевает порода, когда она попадает с поверхности земли в более глубокие слои земной коры — это и есть региональный метаморфизм, — но обратиться и к судьбе метаморфической породы, которая снова подымается в более высокие слои, Бекке подметил и эти изменения и назвал их регрессивным метаморфизмом, или диафторезом, а самые породы — диафторитами.

Можно сказать, что Бекке является основоположником наших современных представлений о метаморфических породах, представлений, которые вместе с ним и за ним широко распространил своей книгой о кристаллических сланцах Грубенман. Бекке был авторитетом в этой области; к его голосу прислушивались и с должным вниманием читали его обзоры успехов в области метаморфизма, обзоры прекрасно составленные, объективные и вместе с тем критические.

Не останавливаясь на описательных петрографических и довольно многочисленных геологических работах, которые отличаются тщательностью, обилием фактического материала и петрологическими обобщениями, остановимся в заключение на одной из них, нашедшей широкий отклик

в петрографической литературе. Это работа, в которой Бекке сравнивает изверженные породы Богемии и Американских Андов и в которой он приходит к обоснованию минералогических и химических различий двух типов магм и соответствующих пород: щелочной и щелочно-земельной. Бекке предлагает заменить громоздкие термины Розенбуша фойяитово-тералитовая, гранито-диоритовая и габбро-перидотитовая магмы терминами атлантическая и тихоокеанская (Atlantische Sippe и Pazifische Sippe) группы. Поскольку речь идет о противопоставлении этих двух типов химического облика изверженных пород, между которыми, по словам самого Бекке, существуют переходные звенья, это знакомая нам точка зрения Розенбуша и Мишель-Леви; можно примыкать к ней или итти другим путем в химической классификации магм и изверженных пород, смотря по индивидуальным взглядам. Но то обстоятельство, что Бекке дал некоторую картину географического распределения этих двух типов и связал их с типами дислокаций — тихоокеанские породы приурочены к областям молодых складчатых горных систем, а атлантические — к сбросовым дислокациям, то обстоятельство, что Прайор, который одновременно с Бекке пришел к такой же группировке, поддерживает географический элемент, что Харкер резко подчеркнул и продолжал подчеркивать вышеуказанное соотношение с типами дислокаций, все это дало толчек к тому, что стали говорить о двух универсальных петрографических провинциях. Это представление об атлантической и тихоокеанской провинциях развили Штарк и Вольф с поправкой в виде бореальной провинции. Ученье об этих двух универсальных провинциях разделило петрографов на две группы: одни из них, и притом многие, являются сторонниками этих провинций, применяют это учение в своих работах: другие, в том числе Вашингтон, Лакруа, отвергают представление об этих провинциях, поскольку в них находит себе выражение географический элемент. Я с самого начала был противником такого взгляда, продолжаю им оставаться и неоднократно высказывался об этом в своих работах. Здесь не место входить в подробный разбор этой контроверзы, но должен сказать, что, когда я перечел, при составлении этого очерка, соответствующую работу Бекке, я убедился, что последователи Бекке пошли дальше его самого. У него термины Атлантический и Тихоокеанский имеют всетаки, главным образом, значение терминов систематических: он говорит о родовой группе — Sippe, а не о провинции, хотя конечно, проглядывает и географический элемент распределения этих пород. Во всяком случае учение об атлантической и тихоокеанской провинциях связано и связывается с именем Бекке и противники этого учения, являются и его противниками,

быть может не столько благодаря ему самому, сколько благодаря позднейшей разработке этого учения.

Из некоторых моих встреч с Бекке, из переписки с ним и со слов работавших у него, я вынес впечатление о Бекке, как о простом, приветливом, доброжелательном человеке. Он отличался большой объективностью, отражавшейся в его отношении к научной полемике. В этом отношении очень характерен эпизод со мной. Когда с 1899 г. я стал помещать в редактируемом Бекке журнале «Tschermak's Mineralogische und Petrographische Mitteilungen» критические очерки по систематике изверженных пород и он приветствовал эти очерки, мне пришлось во втором же очерке коснуться только-что вышедшей работы самого Бекке и с точки зрения моих взглядов отнестись критически к установленным им двум новым типам лав, которые он назвал альборанитом и санторинитом. Он поместил мою статью, но в том же номере дал свою статью, в которой в деликатной объективной форме возражал против моих соображений и отстаивал свою точку зрения. На это я ответил новой статьей, которую он тоже напечатал, без коментариев и без новой статьи со своей стороны, оставив последнее слово за мною. На этом наша полемика закончилась, каждый из нас остался при своем мнении и это нисколько не отразилось на наших отношениях. С русскими петрографами у Бекке было много сношений, так как многие из них печатали свои работы в его журнале, в том числе и крупные капитальные работы (как например Лагорио, Морозевич и др.). С русским петрографическим материалом его связывало и то обстоятельство, что ему, еще сравнительно молодому петрографу, были переданы Абихом изверженные породы Армении; первое петрографическое описание пород Армении принадлежит ему.

Перу Бекке принадлежит и несколько научно-популярных статей, редактирование восьмого издания минералогии Чермака: как уже указано выше, он принимал непосредственное активное участие в распространении научных знаний в широких массах на так называемых «Volkstümliche Hochschulkurse».

Из всего вышеизложенного ясно вытекает, что Бекке был крупным ученым, оставившим глубокий след в петрографии. Он был вместе с тем неутомимым работником, который не покидал научной работы и следил за литературой вплоть до самой своей смерти.

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ ФР. БЕККЕ

По минералогии, кристаллофизике и кристаллографии.

Hypersthen von Rodenmais. T. M. P. M., 1880, 60.
Über den Hessit (Tellursilberglanz) von Botes in Siebenbürgen. Ibid., 301.
Euklas aus den Alpen. Ibid., 1881, 147.
Hornblende und Anthophillit nach Olivin. Ibid., 450.
Bergkrystalle in den Quellbildungen der Teplitzer Thermen. Ibid., 1882, V., 32.
Parallele Verwachsung von Fahlerz und Zinkblende. Ibid., 1883, 831.
Pasteur als Krystallograph. Sitz.-Ber. naturw. med. Ver. f. Böhmen. Lotos, 1886, I, 1.
Eine merkwürdige Kristallisation von Chlorkalium. Ibid., 1898, Nr. 3.
Whewellit von Venustiefbau bei Brux. Ibid., Nr. 4, 1897.
Aragonit von Ustira. T. M. P. M., 1897, 17.
Mineralvorkommen im Zillerthal. Ibid., 107.
Form und Wachstum der Krystalle. Schr. Ver. Verbr. natur. Kenntn. in Wien, 1897, 37(489).
Uralit aus den Ostalpen. T. M. P. M., 1895, 14, 476.
Ein Wort über das Symmetriecentrum. Z. f. Kr. 1896, 25, 73.
Über Chiastolith. T. M. P. M., 1893, XIII, 256.
Schalenblende von Mies in Böhmen. Ibid., 1896, 14, 278.
Scheelit im Granit von Predazzo. Ibid., 277.
Titanit von Zöptau. T. M. P. M., 1891, 12, 169.
Kristallform und optische Orientirung des Keramohalit von Teneriffa. Ibid., 45.
Krystallform optisch aktiver Substanzen. Ibid., 256.
Ätzversuche am Fluorit. T. M. P. M., 1890, 349.
Bemerkungen zu H. Fock's Aufsatz. Z. f. K., XX, 1892, 253.
Über Dolomit und Magnesit und über die Ursache der Tetartoëdrie des ersteren. T. M. P. M., 1890, XI, 224.
Orientierung des Dolomit von Gebroulaz. T. M. P. M., 1890, 536.
Gipszwillinge von Bochnia. Ibid., 26, 1907, 133.
Ein Beitrag zur Kenntniss der Krystallformen des Dolomit. T. M. P. M., X, 9, p. 93.
Die Krystallform des Traubenzuckers und optisch aktiver Substanzen im Allgemeinen. Ibid., 1889, X, 464.
Ätzversuche an Mineralien der Magnetitgruppe. Ibid., 1885, 200.
Einluss der Zwillingsbildung auf die Ausbildung der Krystallform beim Orthoklas. Ibid., 1908, 22, 105.
Beitrag zur Kenntniss der Carborundum Krystalle. Z. f. K., 1895, 24, 537.
Der Aufbau der Krystalle aus Anwachskegeln. Lotos, 1894, XIV.
Ätzversuche am Pyrit. T. M., 1887, 239.
Natürliche Ätzung an Krystallen von Pyrit, Zinkblende, Bleiglanz, Magnetit. Ibid., 1.
Über die Krystallform des Zinnsteins. T. M., 1877, H. 3.
Krystallisirter Vivianit in Säugethierknochen aus dem Laibacher Torfmoor. Ibid.
Über den Glaukodot von Hakanaboa und den Danait von Frankonia. Ibid., H. 2.
Neuere Vorkommen in den österreich. Salzlagerstätten. T. M. P. M., 1907, 26, 132.
Whewellit von Brüx. Ibid., 397.
Bemerkungen über krumme Flächen. Ibid., 403.
Über Chiastolith. Ibid., 13, 1892/93, 256.
Spessartin von Broken Hill. Ibid., 22, 1903, 89.
Neue Mineralvorkommen aus dem Zillerthal. Ibid., 1904, 23, 84.

Lehrbuch der Mineralogie von Tschermak (8 изд.), 1921.
Fossiles Holz an der Putzenwacke von Joachimstal. T. M. P. M., 1912, **31**, 81.
Körperliche Mangandendrite im Trachyt von Spitzbergen, bei Tepl., Böhmen. Ibid., **33**.
Das Wachsen und der Bau der Krystalle. 1918 (Inaugurationsrede 28 X 1918).

По методам петрографического исследования, по полевым шпатам и оптическим константам

Ein neuer Polarisationsapparat von E. Schneider in Wien. T. M. P. M., 1879, 430.
Die optischen Eigenschaften der Plagioklase. T. M. P. M., 1906, **25**, 1.
Messung des Winkels der optischen Axen aus der Hyperbelkrümmung. T. M. P. M., 1905, **24**, 34.
Die Skiodromen. Ein Hilfsmittel bei der Ableitung der Interferenzbilder. Ibid., p. 1.
Optische Untersuchungsmethoden. Denkschr. Wien. Akad. 1905, **75**.
Über die Unterscheidung von Augit und Bronzit in Dünnschliffen. Ibid., **52**, 527.
Über die Bestimmbarkeit der Gesteinsgemengtheile, besonders der Plagioklase auf Grund ihrer Lichtbrechungsvermögens. Sitz.-Ber. Wien. Akad. **102**, 1893, 358.
Klein'sche Lupe mit Mikrometer. T. M. P. M.. 1894, **14**, 375.
Mallard'sche Konstante des Mikrokonoskops. T. M. P. M., 1907. **26**, 509.
Zur Unterscheidung ein- u. zweiachsiger Krystalle im Konoskop. Ibid., 1908, **27**, 177.
Optische Orientierung des Anorthit vom Vesuv. Ibid., 1899, 108, 431.
Zur optischen Orientierung des Anorthit. Akad. Anz. X, 1899, Nr. XXI.
Zur Bestimmung der Plagioclase in Dünschliffen in Schnitten, senkrecht zu M. und P. Ibid., 1899, **18**, 356.
Zur Messung des Axenwinkels an der Hyperbelkrümmung. T. M. P. M., 1909, 290.
Zur Physiographie der Gemengteile der kristallinen Schiefer. Denkschr. Wien. Akad. 1906, **75**, 97.
Optische Untersuchungsmethoden. Denkschr. Wien. Akad. 1904, **75**, 55.
Bestimmung der Dispersion der Doppelbrechung. T. M. P M., 1903, **22**, 378.
Optische Orientierung des Oligoclas-Albit. Ibid., 1900, **20**, 50.
Optische Orientierung des Albit von Amelia. Ibid., 1900, **19**, 321.
Bestimmung kalkreicher Plagioklase durch die Interferenzbilder von Zwillingen. Ibid. **14**, 415.
Orientierung der optischen Axe A im Anorthit. Ibid., 1899—1900, **19**, 243 (203).
Die optischen Eigenschaften der Plagioklase. Ibid., 1906, **25**, 1.
Die optischen Eigenschaften einiger Andesine. Ibid., 1921, 35, 31.
Über eine neue Methode der Achsenwinkelmessung. T. M. P. M., 1905. **24**, 113.
Die optischen Eigenschaften zweier Andesine. Sitz.-Ber. Wien. Akad. 1917, **127**, 473 (совместно с M. Goldschlag).

По петрографии

Über Mineralbestand und Struktur der krystallinen Schiefer. Denkschrift d. Wien. Akad. d. Wiss. 1903, 75 M. C. R. Congr. Géol. Intern. Vienne, 533.
Die krystallinen Schiefer des niederösterreichischen Waldviertels. Sitz.-Berl. Wien. Akad., 1881, LXXXIV, 546.
Eruptivgesteine aus der Gneisformations des niederösterreichischen Waldviertels. T. M. P. M., 1882 (1883), **V**, 247.
Glaseinschlüsse in Contactmineralien von Canzacoli bei Predazzo. T. M. P. M., 1882, V. 147.
Die Entstehung des krystallinen Gebirges. Доклад на 81 Vers. d. Naturf. u. Ärzte Salzburg, 1909 (Naturw. Rundschau 1910).
Die Raumprojection der Gesteinsanalysen, Ibid., 1911, XXX, 499.
Graphische Darstellung von Gesteinsanalysen. Ibid., 1925, XXXVII, 27.

Fortschritte auf dem Gebiete der Matamorphose. Fortschr. d. Miner. u. Petrogr., 1916, **5**, 210.

Struktur und Klüftung. Ibid., 1924, **9**, 185.

Über Zonenstruktur der Krystalle in Ergussgesteinen T. M. P. M., 1897, **17**, 97.

Über Zonenstruktur bei Feldspathen. Lotos, 1897, Nr. 3.

Olivinfels und Antigirit-Serpentin, aus dem Stubachthal, Hohe Tauern. T. M. P. M., 1894, **14**, 271.

Einige Bemerkungen über die Eischlüsse des Granits von Flamanville. T. M. P. M., 1902, **21**, 230.

Über Quarzfremdlinge in Lamprophyren. T. M. P. M., 1890, XI, 271.

Über Myrmekit. Ibid, 1908, **27**, &. Verh. Ges., d. Naturf. Ärzte, 1908, 177.

Über Zwillingsverwachsungen gesteinsbildender Pyroxene und Amphibole. T. M. P. M., 1881, VII, 93.

Blaugrüne Hornblende aus dem Grünschiefer vom Lämmurbüschel. Ibid., 1902, **21** (Mitt. d. Wien. Miner. Ges.).

Bemerkungen betreffend die krystallinen Schiefer aus Brasilien. Sitz.-Ber. Wien. Ak., 1907, **116**, 1201.

Die Etuptivgesteine des Böhmischen Mittelgebirges und der amerikanischen Andes. Atlantische und Pazifische Sippe der Eruptivgesteine. T. M. P. M., 1903, **22**, 209.

Über Alboranit und Santorinit und die Grenzen der Andesitfamillie. Ibid., 1900, **19**, 182.

Der Hyperstenandesit der Insel Alboran. Ibid., 1899, **18**, 525.

Petrographische Studien am Tonalit der Riesenferner. T. M. P. M., 1893, **13**, 379, 433.

Gesteine der Halbinsel Chalcidice, T. M. P. M., 1, 3.

Gesteine von Grichenland. P. M. 1878, **1**, 459, 489, 1879, **11**, 17.

Gesteine der Colubretes. T. M. P. M., 1896, 16, 155.

Anhang (к предыд. статье). Einiges über die Beziehungen von Pyroxen und Amphibol in den Gesteinen. Ibid., 327.

Graphische Darstellung von Gesteinsanalysen. Ibid., 1927, 11, 35.

Über den Monzonit. Festschr. Doelter, 1920, 1.

Differentiationserscheinungen im Zentralgneiss der Hohen Tauern. Vortrag an der Hauptversammlung der Wien Miner. Ges. Lpz.

Fortschritte auf dem Gebiet des Metamorphismus. Fortschr. d. Min., 1911, I, 221.

Das spezifische Gewicht der Tiefengesteine. Sitz.-Ber. Wien. Ak., 1911, 265.

Chemische Analysen von krystallinen Gesteinen der Ostalpen. Denkschr. Wien. Akad., 1912, **75**, 153.

Intrusivgesteine der Ostalpen. T. M. P. M., 1912, **31**, 545.

Petrographische Untersuchungen (микроскопич. описание горных пород собранных Абихом в Армении; см. H. Abich, Geologie des Armenischen Hochlandes. Wien., 1882, I, 329.

Über Krystallysationsschieferung und Piesokrystallisation C. R. X-me Congr. Géol. Mexique. 1906.

Über das Grundgebirge im niederösterreichlichen. Waldviertels. C. R. XI-me Congr. Geol. Stockholm. 1910, 1, 607.

Über Diaphtorite. T. M. P. M., 1909, **28**, 369.

Die Gneissformation des niederösterreichischen Waldviertels. Ibid., 4, 1882, 189, 285.

Granodioritgneiss im Waldviertel. Ibid., 1917, 34, 70.

Zur Faziesklassification der metamorphen Prozesse. T. M. P. M., 1922, **35**, 215.

Bemerkungen zum steirischen Kristallin. Ibid., 119.

Геологические работы и пр.

Bericht über das Erdbeben von Brüx. am 3 Nov. 1896. Sitz.-Ber. Wien. Akad., 1896, **106**, 45.

Bericht über das Erdbeben von 5 Jan. 1897 im südlichen Böhmerwalde. Ibid., 103.

Bericht der Commission für die petrographische Erforschung der Central-Kette der Ostalpen (совместно с Berwerh & Grubenmann). Anz. d. Akad. d. Wiss. Wien., 1898, Nr. 111.

Über die vulkanischen Layen. Schiften d. Vereins zur Verbreitung naturwiss. Kenntnisse. Wien., 1904, 24, 339.

Über den gegenwartigen Zustand des Vesuv. Lotos, 1896, Nr. 6.

Bericht der Commission für die petrographische Erforschung der Centralkette der Ostalpen. Anz. Wien. Akad. 1895, V, 1896, III, 1897, II — III.

Vorläufiger Bericht über den geologischen Bau und die krystallinen Schiefer des Hohen Gesenkes (Altvatergebirge). Sitz.-Ber. Wien. Akad. 1892, 101, 786.

Geologische Beobachtungen im Altvatergebirge. Vorh g. R. A. 1887, 109 (совместно с M. Schuster).

Bericht über das Glaslitzer Erdbeben 24 Oct. bis 25 Nov. 1897. Sitz.-Ber. Wien. Akad., 1898, 102, 789.

Chemische analysen aus dem Laboratorium des deutschen Universität Prag. T. M. P. M., 1899, 18, 94.

Notizen aus dem niederösterreichischen Waldviertel. Ibid., VII, 188—25.

Bericht über geologische und petrographische Untersuchungen am Ostrande des Hochalmkerns. Sitz.-Ber. Wien Akad., 1907, 118, 1045.

Erster Bericht über petrographische und geotektonisehe Untersuchungen im Hochalmmassiv und in den Radstätter Tauern. Sitz.-Ber. Wien. Akad., 1906, 115 (совместно с V. Uhlig).

Bericht über die Aufnahmen am Nord- und Ost-Rande des Hochalmmassivs. Ibid. 1908, 117.

Excursion durch das Westende der Hohen Tauern (Zillerthal). Guide des excursions du Congr. Géol. Intern. Vienne, 1903.

Über die bei Czernowitz im Sommer 1884 und Winter, 1884, stattgefundenen Rutschungen, J. g. R. A. 1883, 35, 396.

Graphit im niederösterreichischen Waldviertel. Mitt. Wien. Miner. Ges., 1917, Nr. 80, 58.

Das Grundgebirge im niederösterreichischen Waldviertel. Congr. Geol. Stockholm, 1912, 1, 619.

Das niederösterreichische Waldviertel. T. M. P. M., 1913, **32**, 175 (совместно с Himmelbauer, Reinhold, Görgey).

Zur Karte des niederösterreichischen Waldviertels, 1915, **23**, 351.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОБОБЩЕНИЕ СПОСОБА JACOBI-MAYER'A ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПОЛНЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ

Г. В. ПФЕЙФФЕРА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

Введение

Возьмем систему m зависимостей:

$$(A)\quad \begin{aligned} &H_1(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0,\\ &H_2(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &H_m(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

связывающих переменные:

$$x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n. \tag{2}$$

Всякую систему, алгебраически эквивалентную системе (1), обозначим через:

$$(B)\quad \begin{aligned} &G_1(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0,\\ &G_2(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0.\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &G_m(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_m) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Положим, что система (1) может быть представлена в форме:

$$(C)\quad \begin{aligned} &F_1 = p_1 - \varphi_1(x_1, \ldots x_n, p_2, \ldots p_m, p_{m+1} \ldots p_n) = 0,\\ &F_2 = p_2 - \varphi_2(x_1, \ldots x_n, p_3, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_m = p_m - \varphi_m(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

и, следовательно, в форме:

$$(D)\quad \begin{aligned} E_1 &= p_1 - \psi_1(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ E_2 &= p_2 - \psi_2(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_m &= p_m - \psi_m(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0.* \end{aligned} \tag{5}$$

Определитель:

$$\Delta = \frac{D(H_1, H_2, \ldots H_m)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial H_2}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial H_m}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H_1}{\partial p_2}, & \frac{\partial H_2}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial H_m}{\partial p_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial H_1}{\partial p_m}, & \frac{\partial H_2}{\partial p_m}, \ldots \frac{\partial H_m}{\partial p_m} \end{vmatrix} \tag{6}$$

не равен нулю на основании соотношений (1):

$$\Delta \neq 0. \tag{7}$$

По теореме Laplace'a:

$$\Delta \equiv (-1)^{i+k} \sum_{r,\,s} (-1)^{r+s} \Delta_{i,\,k}^{r,\,s} \frac{D(H_r, H_s)}{D(p_i, p_k)}; \tag{8}$$

сумма Σ распространена на комбинации r, s чисел $1, 2, \ldots m$; $\Delta_{i,\,k}^{r,\,s}$ — минор определителя Δ, получающийся вычеркиванием коллон r, s и горизонталей i, k; i, k — произвольные, определенно взятые, числа ряда $1, 2, \ldots m$, не равные друг другу.

Присоединив к тождеству (8) тождества:

$$0 = (-1)^{i+k} \sum_{r,\,s} (-1)^{r+s} \Delta_{i'k'}^{r,\,s} \frac{D(H_r, H_s)}{D(p_i, p_k)}, \tag{9}$$

в которых, хоть одно из чисел i', k' отлично от, определенно взятых, чисел i, k, убедимся в том, что определитель:

$$\left|\Delta_{i,\,k}^{r,\,s}\right| \tag{10}$$

не равен нулю на основании соотношений (1):

$$\left|\Delta_{i,\,k}^{r,\,s}\right| \neq 0. \tag{11}$$

* Это возможно, если в системе (1) переменные $x_1, \ldots x_n$ не связаны соотношением или соотношениями.

Ph. Gilbert* установил тождество:

$$(E_i, E_k) = (p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) \equiv \frac{(-1)^{i+k}}{\Delta} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \Delta_{i,k}^{r,s} (H_r, H_s), \quad (12)$$

справедливое не только для равенств (1), но и для равенств:

$$H_1 = a_1, \; H_2 = a_2, \; \ldots \; H_m = a_m, \quad (13)$$

где $a_1, a_2, \ldots a_m$ — произвольные постоянные.

При выводе тождества (12) Ph. Gilbert не делает предположения, что $p_1, p_2, \ldots p_n$ — производные одной и той же функции z по независимым переменным $x_1, x_1, \ldots x_n$: тождество (12) имеет место при любых переменных (2), связанных зависимостями (1).

Тождества, подобные тождеству (12), относящемуся к равенствам (1), можно написать также:

для равенств (3):

$$(E_i, E_k) = (p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) \equiv \frac{(-1)^{i+k}}{\eta} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \eta_{i,k}^{r,s} (G_r, G_s); \quad (14)$$

определители:

$$\eta = \frac{D(G_1, G_2, \ldots G_m)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m)} \quad \text{и} \quad \left|\eta_{i,k}^{r,s}\right| \quad (15)$$

не равны нулю на основании соотношений (3):

$$\eta \neq 0 \quad \text{и} \quad \left|\eta_{i,k}^{r,s}\right| \neq 0, \quad (16)$$

и для равенств (4):

$$(E_i, E_k) = (p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) \equiv \frac{(-1)^{i+k}}{\delta} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \delta_{i,k}^{r,s} (F_r, F_s); \quad (17)$$

определители:

$$\delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots F_m)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m)} \quad \text{и} \quad \left|\delta_{i,k}^{r,s}\right| \quad (18)$$

не равны нулю на основании соотношений (4):

$$\delta = 1 \neq 0 \quad \text{и} \quad \left|\delta_{i,k}^{r,s}\right| \neq 0. \quad (19)$$

* Ph. Gilbert. Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur l'intégration des équations aux dérivées partielles, C. R., t. 91, 1880, pp. 541—544 et pp. 613—616; idem, Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées portielles du premier ordre. Ann. Soc. sci. Bruxelles, vol. V, 2 partie, 1881, pp. 1—16. — P. Mansion. Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Berlin, 1892, pp. 164—170.

Сделаем далее предположение, что система зависимостей (1) — полная система уравнений с частными производными первого порядка, не содержащих функции z: скобки Poisson'а:

$$(H_r, H_s) \tag{20}$$

при соотношениях (1) — нули.

В силу тождества (12) система уравнений (5) инволюционна: скобки Poisson'а:

$$(E_i, E_k) \tag{21}$$

тождественно равны нулю.

На основании тождества (14) и второго неравенства (16) система (3) — полная: скобки Poisson'а:

$$(G_r, G_s) \tag{22}$$

при соотношениях (3) — нули.

Благодаря тождеству (17) и второму неравенству (19), система уравнений (4) — полная. Полнота ее особого рода: скобки Poisson'а:

$$(F_i, F_k),\ i < k \tag{23}$$

обращаются в нули на основании зависимостей:

$$F_{i+1} = 0,\ F_{i+2} = 0, \ldots F_m = 0. \tag{24}$$

В результате сказанного приходим к общей теореме:

Если система (1) уравнений с частными производными первого порядка, не содержащая функции z, — полная, то всякая система, алгебраически ей эквивалентная, — тоже полная,

и к ряду частных заключений:

Системы (3), (4) — полные; система (5) — инволюционная.

Если систему (1) можно привести к виду (U):

$$\text{(U)}\quad \begin{aligned} U_1 &= x_1 - \varphi_1(x_2, \ldots x_k, x_{k+1}, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_k, \\ &\qquad p_{k+1}, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ U_2 &= x_2 - \varphi_2(x_3, \ldots x_k, x_{k+1}, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_k, \\ &\qquad p_{k+1}, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_k &= x_k - \varphi_k(x_{k+1}, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_k, \end{aligned} \tag{25}$$

$$
\begin{aligned}
&p_{k+1}, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\
&\quad = p_{k+1} - \varphi_{k+1}(x_{k+1}, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_k,\\
&p_{k+2}, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\
\text{(U)}\quad U_{k+2} &= p_{k+2} - \varphi_{k+2}(x_{k+1}, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_k, \qquad (25)\\
&p_{k+3}, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
U_m &= p_m - \varphi_m(x_{k+1}, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_k, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,
\end{aligned}
$$

к виду (V):

$$
\text{(V)}\quad
\begin{aligned}
V_1 &= x_1 - \omega_1(x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0,\\
V_2 &= x_2 - \omega_2(x_3, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
V_m &= x_m - \omega_m(x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

и вообще, к виду (W), где m величин ряда (2), не сопряженных между собою, последовательно выражаются через остальные, то все такие системы — полные.

Системы (Ω), эквивалентные системе (1), в которых m величин ряда (2), отчасти сопряженных между собою, выражаются последовательно через остальные, тоже полные, но в дальнейшем нам не понадобятся.

Перейдем к системе m зависимостей:

$$
(\mathfrak{A})\quad
\begin{aligned}
&H_1(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0,\\
&H_2(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&H_m(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0,
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

связывающих переменные (2) и функцию z переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Всякую систему, алгебраически эквивалентную системе (27), обозначим через:

$$
(\mathfrak{B})\quad
\begin{aligned}
&G_1(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0,\\
&G_2(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&G_m(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0,
\end{aligned}
\qquad (28)
$$

Положим, что система (27) приводится к формам:

$$(\mathfrak{C})\quad \begin{aligned} F_1 &= p_1 - \varphi_1(x_1, \ldots x_n, z, p_2, p_3, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ F_2 &= p_2 - \varphi_2(x_1, \ldots x_n, z, p_3, p_4, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_m &= p_m - \varphi_m(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = 0; \end{aligned} \tag{29}$$

$$(\mathfrak{D})\quad \begin{aligned} R_0 &= z - \bar{\omega}_0(x_1, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_{m-1}, p_m, \ldots p_n) = 0,\\ R_1 &= p_1 - \bar{\omega}_1(x_1, \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_{m-1}, p_m, \ldots p_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ R_{m-1} &= p_{m-1} - \bar{\omega}_{m-1}(x_1, \ldots x_n, p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

и. следовательно, к формам:

$$(\mathfrak{E})\quad \begin{aligned} E_1 &= p_1 - \psi_1(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ E_2 &= p_2 - \psi_2(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ E_m &= p_m - \psi_m(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n = 0; \end{aligned} \tag{31}$$

$$(\mathfrak{F})\quad \begin{aligned} S_0 &= z - \omega_0(x_1, \ldots x_n, p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ S_1 &= p_1 - \omega_1(x_1, \ldots x_n, p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ S_{m-1} &= p_{m-1} - \omega_{m-1}(x_1, \ldots x_n, p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0; \end{aligned} \tag{32}$$

$$(\mathfrak{G})\quad \begin{aligned} T_0 &= z - \omega_0 - x_1(p_1 - \omega_1) - \ldots - x_{m-1}(p_{m-1} - \omega_{m-1}) = 0,\\ T_1 &= p_1 - \omega_1 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ T_{m-1} &= p_{m-1} - \omega_{m-1} = 0.* \end{aligned} \tag{33}$$

Определители:

$$\Delta = \frac{D(H_1, H_2, \ldots H_m)}{D(p_1, p_2, \ldots p_m)} \tag{34}$$

и

$$\nabla = \frac{D(H_1, H_2, \ldots H_m)}{D(z, p_1, \ldots p_{m-1})} \tag{35}$$

* Для этого необходимо, чтобы система (27) не содержала зависимостей между $z, x_1, \ldots x_n$ или $x_1, x_2, \ldots x_n$.

не равны нулю на основании соотношений (27);

$$\Delta \neq 0, \tag{36}$$

$$\nabla \neq 0. \tag{37}$$

Считая z функцией переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ и пользуясь рассуждениями, аналогичными рассуждениям Ph. Gilbert'a,* без особых затруднений установим тождество:

$$[E_i, E_k] = [p_i - \psi_i, p_k - \psi_k] \equiv (-1)^{i+k} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \Delta_{i,k}^{r,s} [H_r, H_s], \tag{38}$$

относящееся к зависимостям (27). Подобные же тождества можно написать для равенств: (28), (29), (30), (31), (32), (33).

Сделав предположение, что система зависимостей (27) — полная система уравнений с частными производными первого порядка, содержащих функцию z, придем к общей теореме:

Если система (27) *уравнений с частными производными первого порядка, содержащая функцию* z, — *полная, то всякая система, алгебраически ей эквивалентная, тоже полная*

и к ряду частных заключений:

Системы (29), (30), (31), (32) — *полные, система* (33) — *инволюционная.*

Обобщая способ Jacobi интегрирования полных систем линейных однородных уравнений,** мы ввели понятия: о линейной однородной *системе последовательных полных систем* и о *системе последовательных полных систем,* обобщающей Jacobi'еву систему.

Производя обобщение способа Jacobi-Mayer'a интегрирования нелинейных уравнений и полных систем нелинейных уравнений, не содержащих функции z и содержащих функцию z, мы установим понятия: о нелинейной *системе последовательных полных систем* и об основной *системе последовательных полных систем.*

Полную систему (A) — (1):

$$H_1 = 0, \; H_2 = 0, \ldots H_{m-1} = 0, \; H_m = 0, \tag{39}$$

не содержащую функцию z, для которой равны нулю скобки Poisson'a:

(H_r, H_s), r, s — комб. чисел $1, 2, \ldots m$, — на основании равенств (39),

* См. прим. на стр. 133

** Г. В. Пфейффер. Обобщение способа Jacobi интегрирования полных систем линейных однородных уравнений. Обобщение соответствующих исследований Clebsch'a. ИМЕН, 1931, № 8, стр. 1051—1087.

будем называть нелинейной *системой последовательных полных систем* в том случае, если системы

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0, \ldots H_{m-1} = 0; \tag{40}$$
$$H_1 = 0,\ H_2 = 0, \ldots H_{m-2} = 0; \tag{41}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_1 = 0,\ H_2 = 0, \ldots H_3 = 0; \tag{42}$$
$$H_1 = 0,\ H_2 = 0, \tag{43}$$

— полные; нулю равны скобки Poisson'a:

(H_r, H_s), r, s — комб. чисел 1, 2, ... $m-1$, — на основании равенств (40);
» » » » 1, 2, ... $m-2$, — » » » (41);
. . . . . .
» » » » 1, 2, 3, — » » » (42);
(H_1, H_2) » » » — » » » (43).

Каждая из систем (40), (41), ... (42), (43) — нелинейная *система последовательных полных систем.*

Полная система (C) — (4):

$$F_m = 0,\ F_{m-1} = 0, \ldots F_2 = 0,\ F_1 = 0 \tag{44}$$

— нелинейная *система последовательных полных систем,* ибо системы:

$$F_m = 0,\ F_{m-1} = 0, \ldots F_2 = 0; \tag{45}$$
$$F_m = 0,\ F_{m-1} = 0, \ldots F_3 = 0; \tag{46}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_m = 0,\ F_{m-1} = 0 \tag{47}$$

— полные. Примем ее за основную *систему последовательных полных систем,* не содержащую функции z.

Системы (U), (V), (W), если отбрасывать уравнения, начиная с первого, и система (D) — (5), как инволюционная, — *системы последовательных полных систем.*

Полную систему (Z) — (27):

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0, \ldots H_m = 0, \tag{48}$$

содержащую функцию z, будем называть нелинейной *системой последовательных полных систем,* если системы:

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0,\ \ldots\ H_{m-1} = 0; \tag{49}$$

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0,\ \ldots\ H_{m-2} = 0; \tag{50}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0,\ H_3 = 0; \tag{51}$$

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0 \tag{52}$$

— полные.

Системы (𝔊) — (29), (𝔇) — (30), (𝔈) — (31), (𝔉) — (32), если отбрасывать уравнения, начиная с первого, и система (𝔊) — (33), как инволюционная, — *системы последовательных полных систем.*

Систему (𝔊) — (29), но не систему (𝔇) — (30) примем за основную *систему последовательных полных систем.*

Примечание. Полную систему двух уравнений, не содержащих функции z или содержащих функцию z, приходится считать *системой последовательных полных систем.*

Обобщение способа Jacobi-Mayer'a*

Предлагаемое нами обобщение способа Jacobi-Mayer'a заключается в следующем: будет показано, что данные полные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка могут быть взяты в более общей форме, чем это делается обыкновенно.

Чтобы изложить сущность способа Jacobi-Maeyr'a интегрирования полных систем нелинейных уравнений, не содержащих функции z, нет надобности приводить данную полную систему (A) — (1) к инволюционному виду (D) — (5), достаточно заменить ее основной *системой последовательных полных систем* (C) — (4):

$$\text{(C)}\quad \begin{aligned} &F_1 = p_1 - \varphi_1(x_1, \ldots x_n, p_2, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ &F_2 = p_2 - \varphi_2(x_1, \ldots x_n, p_3, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_m = p_m - \varphi_m(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0.** \end{aligned} \tag{53}$$

* G. Pfeiffer.La généralisation de la méthode de Jacobi-Mayer. C. R., t. 191, 1930, pp. 1107—1109.

** При $m = 1$ получим одно уравнение.

Присоединим к системе (53) зависимость:

$$\Phi(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) = a \tag{54}$$

и потребуем, чтобы она совместно с уравнениями (53) давала полную систему. Для этого необходимо, чтобы скобки Poisson'a:

$$(F_i, \Phi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right) =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m+1}^{n} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right\}, \tag{55}$$

$$i = 1, 2, \ldots m$$

были нулями на основании соотношений:

$$F_{i+1} = 0, \; F_{i+2} = 0, \ldots F_m = 0, \tag{56}$$

что то же, на основании равенств:

$$E_{i+1} = 0, \; E_{i+2} = 0, \ldots E_m = 0. \tag{57}$$

Обозначим результат подстановки выражений:

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= \psi_{i+1}(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n), \\ p_{i+2} &= \psi_{i+2}(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m &= \psi_m(x_1, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n) \end{aligned} \tag{58}$$

в функцию:

$$P_i(x_1, \ldots x_n, p_{i+1}, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) \tag{59}$$

через (P_i):

$$(P_i) \equiv P_i(x_1, \ldots x_n, \psi_{i+1}, \ldots \psi_m, p_{m+1}, \ldots p_n), \tag{60}$$

тогда функция Φ будет интегралом системы линейных уравнений:

$$X_1(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_3} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \ldots - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_m} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_j} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right\} = 0, \tag{61}$$

$$X_2(\Phi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} - \ldots - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_m}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_m} -$$

$$-\sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_j}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0, \tag{61}$$

. . . . . .

$$X_m(\Phi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_m} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial p_j}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right\} = 0.$$

Та же функция Φ — интеграл инволюционной системы линейных уравнений:

$$(E_i, \Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} - \sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial p_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right) = 0, \tag{62}$$

$$i = 1, 2, \ldots m,*$$

отсюда вытекает, что система (61) — полная.

Система (61) принадлежит к числу линейных однородных *систем последовательных полных систем,* обобщающих Jacobi'еву систему: дифференциальные операторы ее пишутся непосредственно.**

Для уравнения:

$$X_m(f) = 0$$

и полных систем:

$$X_m(f) = 0,\ X_{m-1}(f) = 0; \tag{64}$$

. . . . . .

$$X_m(f) = 0,\ X_{m-1}(f) = 0, \ldots X_2(f) = 0 \tag{65}$$

дифференциальными операторами служат бесконечно-малые преобразования:

$$X_{m-1}(f),\ X_{m-2}(f), \ldots X_1(f). \tag{66}$$

Так как независимые интегралы системы (61) независимы по отношению к переменным:

$$x_{m+1}, \ldots x_n, p_{m+1}, \ldots p_n, \tag{67}$$

то всегда существует зависимость (54), решаемая относительно одной из переменных:

$$p_{m+1}, \ldots p_n, \tag{68}$$

напр., относительно p_{m+1}.

* Ed. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1921, pp. 274—275.

** G. Pfeiffer. Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. C. R., 1930, t. 190, pp. 909—911.

Дальнейший ход рассуждений ясен.

При практическом интегрировании, вместо инволюционной системы (D) — (5) и основной *системы последовательных полных систем* (C) — (4) часто бывает выгодно пользоваться формами (U), (V), (W) данной полной системы (A) — (1). Разница получается в том, что формы (U), (V), (W) могут привести к интегралу S. Lie, но не к интегралу Lagrange'a.

После указаний Mansion'a, результатов Салтыкова и наших исследований построение интеграла Lagrange'a по интегралу S. Lie не представляет затруднений.

Весьма интересно рассмотреть системы линейных уравнений, связанные с формами (U), (V), (W) системы (A) — (1).

Уравнение:

$$\Phi(x_{k+1}, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_k, p_{m+1}, \ldots p_n) = a, \quad (69)$$

в соединении с уравнениями (U), даст полную систему, если функция Φ — интеграл системы линейных уравнений:

$$Y_1(\Phi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + \ldots + \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_k} -$$

$$- \sum_{j=k+1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0,$$

$$Y_2(\Phi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + \ldots + \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_k} -$$

$$- \sum_{j=k+1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0,$$

. . . . . (70)

$$Y_k(\Phi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial p_k} - \sum_{j=k+1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0,$$

$$Y_{k+1}(\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_{k+1}} - \left[\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial p_{k+2}}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_{k+2}} - \left[\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial p_{k+3}}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_{k+3}} - \ldots - \left[\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial p_m}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_m} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0,$$

$$Y_{k+2}(\Phi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_{k+2}} - \left[\frac{\partial\varphi_{k+2}}{\partial p_{k+3}}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_{k+3}} - \ldots - \left[\frac{\partial\varphi_{k+2}}{\partial p_m}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_m} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_{k+2}}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_{k+2}}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0,$$

. . . . . .

$$Y_m(\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_m} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0;$$

скобки [ ] указывают на то, что количества:

$$x_1, \ldots x_k, p_{k+1}, \ldots p_m \tag{71}$$

заменены найденными из уравнений (1) функциями количеств:

$$x_{k+1}, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_k, p_{m+1}, \ldots p_n. \tag{72}$$

Система (70) полная; она принадлежит к числу линейных однородных *систем последовательных полных систем*, обобщающих Jacobi'еву систему,

Уравнение:

$$\Phi(x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = a, \tag{73}$$

в соединении с уравнениями (V), составит полную систему, если функция Φ — интеграл системы линейных уравнений:

$$Z_1(\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} - \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} - \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} - \ldots - \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_m} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial p_j}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right\} = 0,$$

$$Z_2(\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} - \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} - \ldots - \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_m} - \tag{74}$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial p_j}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right\} = 0,$$

. . . . . .

$$Z_m(\Phi) = -\frac{\partial\Phi}{\partial p_m} - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial\omega_m}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial\omega_m}{\partial p_j}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right\} = 0;$$

скобки ( ) указывают на то, что количества:

$$x_1, x_2, \ldots x_m \tag{75}$$

заменены найденными из уравнений (1) функциями количеств:

$$x_{m+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n. \tag{76}$$

Не трудно понять, что изложенные рассуждения, связаные с системами (U), (V), применимы также к системе (W).

Системами (Ω), как нами заявлено, мы пользоваться не будем, и вот почему. Связанные с системами (Ω) системы линейных уравнений, определяющие функции Ф, — полные, но не представляют линейных однородных *систем последовательных полных систем,* обобщающих Jacobi'еву систему.

Чтобы изложить сущность способа Jacobi-Mayer'a интегрирования полных систем нелинейных уравнений, содержащих функцию z, тоже нет надобности приводить данную полную систему (𝔄) — (27) к инволюционному виду (𝔊) — (33), достаточно заменить ее основной *системой последовательных полных систем* (𝔊) — (29):

$$(\mathfrak{G})\quad \begin{aligned} &F_1 = p_1 - \varphi_1(x_1, \ldots x_n, z, p_2, p_3, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ &F_2 = p_2 - \varphi_2(x_1, \ldots x_n, z, p_3, p_4, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &F_m = p_m - \varphi_m(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = 0.* \end{aligned} \tag{77}$$

Присоединим к системе (77) зависимость:

$$\Phi(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) = a \tag{78}$$

и потребуем, чтобы она совместно с уравнениями (77) давала полную систему. Для этого необходимо, чтобы скобки Weiler'a:

$$[F_i, \Phi] = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \left\{p_i - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} p_j - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} p_j\right\}\frac{\partial \Phi}{\partial z} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} \left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} p_j\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}\right\}, \tag{79}$$

$$i = 1, 2, \ldots m$$

* При $m = 1$ получим одно уравнение.

были нулями на основании соотношений:

$$F_i = 0,\ F_{i+1} = 0, \ldots F_m = 0, \tag{80}$$

что то же, на основании равенств:

$$E_i = 0,\ E_{i+1} = 0, \ldots E_m = 0. \tag{81}$$

Обозначим результат подстановки выражений:

$$\begin{aligned} p_i &= \psi_i(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n), \\ p_{i+1} &= \psi_{i+1}(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m &= \psi_m(x_1, \ldots x_n, z, p_{m+1}, \ldots p_n) \end{aligned} \tag{82}$$

в функцию:

$$Q_i(x_1, \ldots x_n, z, p_i, \ldots p_m, p_{m+1}, \ldots p_n) \tag{83}$$

через $[Q_i]$:

$$[Q_i] \equiv Q_i(x_1, \ldots x_n, z, \psi_i, \ldots \psi_m, p_{m+1}, \ldots p_n), \tag{84}$$

тогда функция Φ будет интегралом системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} X_1(\Phi) = {} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_2}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_3}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} - \ldots - \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_m}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_m} + \\ & + \left\{\psi_1 - \sum_{j=2}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_j}\right]\psi_j - \sum_{j=m+1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_j}\right]p_j\right\}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \\ & - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left(\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\right] + \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right]p_j\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0, \\ X_2(\Phi) = {} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_3}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} - \ldots - \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_m}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_m} + \\ & + \left\{\psi_2 - \sum_{j=3}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_j}\right]\psi_j - \sum_{j=m+1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_j}\right]p_j\right\}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \\ & - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left(\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\right] + \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right]p_j\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0, \end{aligned} \tag{85}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} X_m(\Phi) = {} & \frac{\partial\Phi}{\partial x_m} + \left\{\psi_m - \sum_{j=m+1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial p_j}\right]p_j\right\}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \\ & - \sum_{j=m+1}^{n}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} - \left(\left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}\right] + \left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\right]p_j\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Система линейных уравнений, связанная с системой (Ⓒ)—(31), — частный вид системы (85).

Совокупность переделок, которым была подвергнута система (Ⓒ)—(29), применима также к системе (Ⓓ)—(30).

Зависимость:

$$\Phi(x_1, \ldots x_n, p_m, \ldots p_n) = a, \tag{86}$$

в соединении с уравнением (30), дает полную систему, если скобки Weiler'a:

$$[R_0, \Phi] = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial p_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m}^{n}\left(p_j - \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial x_j}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \tag{87}$$

и

$$[R_i, \Phi] = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_{j=i+1}^{m-1} \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial p_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \sum_{j=m}^{n}\left(\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial p_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi}{\partial p_j}\right), \tag{88}$$

$$i = 1, 2, \ldots (m-1)$$

равны нулю на основании соотношений:

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0, \ldots R_{m-1} = 0 \tag{89}$$

и

$$R_{i+1} = 0,\ R_{i+2} = 0, \ldots R_{m-1} = 0, \tag{90}$$

что то же, на основании равенств:

$$S_1 = 0,\ S_2 = 0, \ldots S_{m-1} = 0 \tag{91}$$

и

$$S_{i+1} = 0,\ S_{i+2} = 0, \ldots S_{m-1} = 0. \tag{92}$$

Обозначим результат подстановки выражений:

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= \omega_{i+1}(x_1, \ldots x_n, p_m, \ldots p_n), \\ p_{i+2} &= \omega_{i+2}(x_1, \ldots x_n, p_m, \ldots p_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{m-1} &= \omega_{m-1}(x_1, \ldots x_n, p_m, \ldots p_n) \end{aligned} \tag{93}$$

в функцию:

$$N_i(x_1, \ldots x_n, p_{i+1}, \ldots p_{m-1}, p_m, \ldots p_n) \tag{94}$$

через $[N_i]$:

$$[N_i] = N_i(x_1, \ldots x_n, \omega_{i+1}, \ldots \omega_{m-1}, p_m, \ldots p_n), \tag{95}$$

тогда функция Φ — интеграл системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial\vec{\omega}_0}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}+\sum_{j=m}^{n}\left(p_j-\left[\frac{\partial\vec{\omega}_0}{\partial x_j}\right]\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}-\sum_{j=i+1}^{m-1}\left[\frac{\partial\vec{\omega}_i}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}-\sum_{j=m}^{n}\left(\left[\frac{\partial\vec{\omega}_i}{\partial p_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}-\left[\frac{\partial\vec{\omega}_i}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right)=0, \tag{96}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots\ (m-1).$$

Система линейных уравнений, связанная с системой (𝔗)—(32)—частный вид системы (96). Функция Φ уравнения (86), в то же время, — интеграл полной системы линейных уравнений:

$$[T_0,\ \Phi]=0,\ (T_1,\ \Phi)=0,\ \ldots\ (T_{m-1},\ \Phi)=0,* \tag{97}$$

связанной с инволюционной системой (𝔖)—(33); в силу этого системы (85), (96)—полные.

Система (85) принадлежит к числу линейных однородных *систем последовательных полных систем,* обобщающих Jacobi'еву систему, для которых непосредственно пишутся дифференциальные операторы,** система (96) не подходит под этот тип, ее нужно переделывать. Отсюда вытекает, что перед системой (𝔇)—(30) преимущественно следует пользоваться основной системой (𝔊)—(29).

Пример.

Возьмем полную систему двух уравнений:

$$F_1=p_1+\frac{(x_2p_2-x_4p_4)x_4p_2}{x_1p_3}+\frac{(x_3x_4-x_2)p_2}{x_1}=0,$$

$$F_2=p_2-x_1p_3=0; \tag{1}$$

$$(F_1,\ F_2)=0 \text{ на основании } F_2=0.$$

Система (1)—основная *система последовательных полных систем.*

Присоединим к системе (1) зависимость:

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p_3,\ p_4)=a \tag{2}$$

и потребуем, чтобы уравнения (1), (2) давали полную систему.

* Ed. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1921, p. 289.

** G. Pfeiffer. Sur les opérateurs d'un système complet d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. C. R., 1930, t. 190, pp. 909—911.

Функция Ф должна быть интегралом линейной однородной *системы последовательных полных систем,* обобщающей Jacobi'еву систему:

$$X_1(\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \left\{\frac{x_4}{x_1 p_3}[(2x_1x_2 + x_3)p_3 - x_4p_4] - \frac{x_2}{x_1}\right\}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} -$$
$$- \frac{x_4}{p_3}(x_1x_2p_3 - x_4p_4)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} - x_4^2\frac{\partial\Phi}{\partial x_4} - x_4p_3\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} -$$
$$- [(x_1x_2 + x_3)p_3 - 2x_4p_4]\frac{\partial\Phi}{\partial p_4} = 0, \tag{3}$$
$$X_2(\Phi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = 0;$$
$$X_1X_2(\Phi) - X_2X_1(\Phi) = \frac{(1 - x_1x_4)}{x_1}X_2(\Phi).$$

Независимыми интегралами уравнения:

$$X_2(\Phi) = 0 \tag{4}$$

являются функции:

$$\omega_1 = x_1,\ \omega_2 = x_4,\ \omega_3 = p_3,\ \omega_4 = p_4,\ \omega_5 = x_3 + x_1x_2. \tag{5}$$

Бесконечно-малое преобразование:

$$X_1(\Phi) \tag{6}$$

— оператор уравнения (4):

$$X_1(\omega_1) = 1,\ X_1(\omega_2) = -\omega_2^2,\ X_1(\omega_3) = -\omega_2\omega_3,\ X_1(\omega_4) =$$
$$= 2\omega_2\omega_4 - \omega_3\omega_5,\ X_1(\omega_5) = \omega_2\omega_5. \tag{7}$$

Подберем функцию:

$$\Theta(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \tag{8}$$

таким образом, чтобы:

$$X_1(\Theta) = \frac{\partial\theta}{\partial\omega_1} - \omega_2^2\frac{\partial\theta}{\partial\omega_2} - \omega_2\omega_3\frac{\partial\theta}{\partial\omega_3} + (2\omega_2\omega_4 - \omega_3\omega_5)\frac{\partial\theta}{\partial\omega_4} +$$
$$+ \omega_2\omega_5\frac{\partial\theta}{\partial\omega_5} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d\omega_1}{1} = \frac{d\omega_2}{-\omega_2^2} = \frac{d\omega_3}{-\omega_2\omega_3} = \frac{d\omega_4}{2\omega_2\omega_4 - \omega_3\omega_5} = \frac{d\omega_5}{\omega_2\omega_5}. \tag{10}$$

Отсюда видно, что одним из интегралов системы:

$$X_1(\Phi) = 0,\ X_2(\Phi) = 0 \tag{11}$$

служит выражение:

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}.$$

Зависимость (2) можно взять в форме:

$$\frac{p_3}{x_4} = a. \tag{13}$$

Уравнения (1), (13) приводят к основной *системе последовательных полных систем:*

$$\begin{aligned} f_1 &= p_1 + \frac{(x_2 p_2 - x_4 p_4) x_4 p_2}{x_1 p_3} + \frac{(x_3 x_4 - x_2) p_2}{x_1} = 0, \\ f_2 &= p_2 - x_1 p_3 = 0, \\ f_3 &= p_3 - a x_4 = 0; \end{aligned} \tag{14}$$

$$(f_1, f_2) = 0 \text{ на основании } f_2 = 0,$$
$$(f_1, f_3) = 0 \text{ на основании } f_3 = 0,$$
$$(f_2, f_3) \equiv 0.$$

Присоединим к системе (14) зависимость:

$$w(x_1, x_2, x_3, x_4, p_4) = b \tag{15}$$

и потребуем, чтобы уравнения (14), (15) давали полную систему.

Функция w должна быть интегралом линейной однородной *системы последовательных полных систем,* обобщающей Jacobi'еву систему:

$$\begin{aligned} -Y_1(w) &= \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1}{a x_1}\{x_4[a(2x_1 x_2 + x_3) - p_4] - a x_2\}\frac{\partial w}{\partial x_2} - \\ &\frac{x_4}{a}(a x_1 x_2 - p_4)\frac{\partial w}{\partial x_3} - x_4^2 \frac{\partial w}{\partial x_4} - x_4[a(x_1 x_2 + x_3) - 2p_4]\frac{\partial w}{\partial p_4} = 0, \\ Y_2(w) &= \frac{\partial w}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0, \\ Y_3(w) &= \frac{\partial w}{\partial x_3} + a\frac{\partial w}{\partial p_4} = 0; \end{aligned} \tag{16}$$

$$Y_1 Y_2(w) - Y_2 Y_1(w) = \frac{1 - x_1 x_4}{x_1} Y_2(w),$$
$$Y_1 Y_3(w) - Y_3 Y_1(w) = x_4 Y_3(w),$$
$$Y_2 Y_3(w) - Y_3 Y_2(w) \equiv 0.$$

Независимыми интегралами уравнения:

$$Y_3(w) = 0 \tag{17}$$

являются функции:

$$\varphi_1 = x_1,\ \varphi_2 = x_2,\ \varphi_3 = x_4,\ \varphi_4 = p_4 - ax_3. \tag{18}$$

Бесконечно-малое преобразование:

$$Y_2(w) \tag{19}$$

— оператор уравнения (17):

$$Y_2(\varphi_1) = 0,\ Y_2(\varphi_2) = 1,\ Y_2(\varphi_3) = 0,\ Y_2(\varphi_4) = a\varphi_1. \tag{20}$$

Подберем функцию:

$$\vartheta(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4), \tag{21}$$

таким образом, чтобы:

$$Y_2(\vartheta) = \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi_2} + a\varphi_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi_4} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{d\varphi_2}{1} = \frac{d\varphi_4}{a\varphi_1}. \tag{23}$$

Отсюда видно, что системе:

$$Y_2(w) = 0,\ \ Y_3(w) = 0 \tag{24}$$

принадлежат независимые интегралы:

$$\psi_1 = \varphi_1,\ \psi_2 = \varphi_3,\ \psi_3 = \varphi_4 - a\varphi_1\varphi_2. \tag{25}$$

Бесконечно-малое преобразование:

$$Y_1(w) \tag{26}$$

— оператор системы (24).

Так как:

$$\begin{aligned} &Y_1(\varphi_1) = 1, \\ &Y_1(\varphi_2) = \frac{1}{a\varphi_1}\left[\varphi_3(2a\varphi_1\varphi_2 - \varphi_4) - a\varphi_2\right], \\ &Y_1(\varphi_3) = -\varphi_3^2, \\ &Y_1(\varphi_4) = \varphi_3\varphi_4, \end{aligned} \tag{27}$$

то:

$$Y_1(\psi_1) = 1,\ Y_1(\psi_2) = -\psi_2^2,\ Y_1(\psi_3) = 2\psi_2\psi_3. \tag{28}$$

Подберем функцию:

$$\eta(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \tag{29}$$

таким образом, чтобы:

$$Y_1(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial \psi_1} - \psi_2^2 \frac{\partial \eta}{\partial \psi_2} + 2\psi_2 \psi_3 \frac{\partial \eta}{\partial \psi_3} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{d\psi_1}{1} = \frac{d\psi_2}{-\psi_2^2} = \frac{d\psi_3}{2\psi_2 \psi_3}. \tag{31}$$

Отсюда видим, что одним из интегралов системы:

$$Y_1(w) = 0, \quad Y_2(w) = 0, \quad Y_3(w) = 0 \tag{32}$$

служит выражение:

$$\psi_2^2 \psi_3 = \varphi_3^2(\varphi_4 - a\varphi_1 \varphi_2) = x_4^2 [p_4 - a(x_1 x_2 + x_3)]. \tag{33}$$

Зависимость (15) можно взять в форме:

$$x_4^2 [p_4 - a(x_1 x_2 + x_3)] = b. \tag{34}$$

Уравнения (14), (34) дают выражения производных:

$$\begin{aligned} p_1 &= a x_2 x_4 + b, \\ p_2 &= a x_1 x_4, \\ p_3 &= a x_4, \\ p_4 &= a(x_1 x_2 + x_3) + \frac{b}{x_4^2} \end{aligned} \tag{35}$$

и, вместе с тем, функцию z:

$$z = a x_4 (x_1 x_2 + x_3) + b \frac{(x_1 x_4 - 1)}{x_4} + c. \tag{36}$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ВЕКТОРИАЛЬНЫЙ ВЫВОД ВАРИАЦИЙ НЕКОТОРЫХ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, РАСПРОСТРАНЕННЫХ НА ПЕРЕМЕННУЮ ОБЛАСТЬ

Ю. В. ИКОРНИКОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

Предлагаемая статья имеет целью дать однообразный вывод формул для — вариаций ряда интегралов, при условии, что область интегрирования изменяется непрерывно с изменением того параметра, по которому интеграл дифференцируется. Вывод основан на свойствах взаимности двух троек векторов.

1. Пусть поверхность задана уравнением

$$\bar{\rho} = \xi i + \eta j + \zeta q,$$

где ξ, η, ζ непрерывные и дифференцируемые функции независимых переменных параметров x, y и i, j, q орты прямоугольных декартовых координатных осей, имеющих левое расположение и $\bar{\rho}$ полярный вектор точек поверхности.

Построим векторы (Begleitvectoren)

$$\bar{b}_1 = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} i + \frac{\partial \eta}{\partial x} j + \frac{\partial \zeta}{\partial x} q, \quad \bar{l}_1 = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} i + \frac{\partial \eta}{\partial y} j + \frac{\partial \zeta}{\partial y} q,$$

расположенные очевидно в касательной плоскости в данной точке поверхности.

$$\text{Вектор } \bar{h} = \{\bar{b}_1 \cdot \bar{l}_1\} = \begin{vmatrix} i, & j, & q \\ \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y}, & \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) i +$$

$$+ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) q \ ^*$$

перпендикулярен к касательной плоскости.

* Здесь векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначено так $\{\bar{a} \cdot \bar{b}\}$, а их геометрическое произведение так $(\bar{a} \cdot \bar{b})$.

Если $\bar{\beta}$ орт, нормальный к поверхности и направленный в ту же сторону, как и вектор $\{\bar{b}_1 . \bar{l}_1\}$, то $\bar{h} = h\bar{\beta}$.

Так как

$$h^2 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{\partial\zeta}{x\partial}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2.$$

то

$$h^2 = \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right] -$$
$$- \left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]^2 = EG - F^2.$$

Таким образом, нормальный к поверхности орт $\bar{\beta}$, направленный в ту же сторону куда направлен вектор $\{\bar{b}_1 . \bar{l}_1\}$ будет равен

$$\bar{\beta} = \frac{\{\bar{b}_1 . \bar{l}_1\}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Если поверхность задана уравнением

$$\bar{\rho} = xi + yj + zq,$$

где

$$z = \varphi(x, y),$$

то

$$\bar{b}_1 = \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x} = i + Pq, \quad \bar{l}_1 = j + \theta q,$$

где

$$P = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \theta = \frac{\partial z}{\partial y}$$

и следовательно,

$$\bar{h} = h\bar{\beta} = \{\bar{b}_1 . \bar{l}_1\} = \begin{vmatrix} i, & j, & q \\ 1, & 0, & P \\ 0, & 1, & \theta \end{vmatrix} = -Pi - \theta j + q$$

и следовательно

$$\bar{\beta} = \frac{-Pi - \theta j + q}{\sqrt{1 + P^2 + \theta^2}},$$

где $\bar{\beta}$ орт, нормальный к поверхности и направленный в ту же сторону, куда направлен вектор $\{\bar{b}_1 . \bar{l}_1\}$.

2. Пусть дано взаимнооднозначное соответствие между точками x, y, z изменяемой среды в момент t_0 и точками ξ, η, ζ той же среды, отнесенными к тем же декартовым координатным осям в момент t, определяемое равенствами

$$\text{I} \qquad \xi = f_1(t, x, y, z), \quad \eta = f_2(t, x, y, z), \quad \zeta = f_3(t, x, y, z)$$

и

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta),$$

где функции предполагаются непрерывными, однозначными и дифференцируемыми. Так как координаты x, y, z какой-нибудь точки среды будут значениями координат ξ, η, ζ той же точки при $t = t_0$, то x, y, z не зависят от t и следовательно из формулы I, при $t = t_0$ будем иметь, что

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z.$$

Построим векторы

$$\text{II} \qquad \bar{a} = \frac{\partial \xi}{\partial x} i + \frac{\partial \eta}{\partial x} j + \frac{\partial \zeta}{\partial x} q, \quad \bar{b} = \frac{\partial \xi}{\partial y} i + \frac{\partial \eta}{\partial y} j + \frac{\partial \zeta}{\partial y} q, \quad \bar{e} = \frac{\partial \xi}{\partial z} i + \frac{\partial \eta}{\partial z} j + \frac{\partial \zeta}{\partial z} q$$

и

$$\bar{h}_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} i + \frac{\partial x}{\partial \eta} j + \frac{\partial x}{\partial \zeta} q, \quad \bar{h}_2 = \frac{\partial y}{\partial \xi} i + \frac{\partial y}{\partial \eta} j + \frac{\partial y}{\partial \zeta} q, \quad \bar{h}_3 = \frac{\partial z}{\partial \xi} i + \frac{\partial z}{\partial \eta} j + \frac{\partial z}{\partial \zeta} q,$$

где i, j, q координатные орты, взаимно перпендикулярные и имеющие левое расположение.

Легко видеть, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{e}$ и $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ взаимны и следовательно,

$$\text{III} \qquad \bar{h}_1 = \frac{\{\bar{b} \cdot \bar{e}\}}{(\bar{a} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{e}\})}, \quad \bar{h}_2 = \frac{\{\bar{e} \cdot \bar{a}\}}{(\bar{a} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{e}\})}, \quad \bar{h}_3 = \frac{\{\bar{a} \cdot \bar{b}\}}{(\bar{a} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{e}\})}$$

и

$$\text{IV} \qquad \begin{aligned} &(\bar{h}_1 \cdot \bar{a}) = 1, \quad (\bar{h}_1 \cdot \bar{b}) = 0, \quad (\bar{h}_1 \cdot \bar{e}) = 0 \\ &(\bar{h}_2 \cdot \bar{a}) = 0, \quad (\bar{h}_2 \cdot \bar{b}) = 1, \quad (\bar{h}_2 \cdot \bar{e}) = 0 \\ &(\bar{h}_3 \cdot \bar{a}) = 0, \quad (\bar{h}_3 \cdot \bar{b}) = 0, \quad (\bar{h}_3 \cdot e) = 1. \end{aligned}$$

Пусть

$$\bar{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t} i + \frac{\partial \eta}{\partial t} j + \frac{\partial \zeta}{\partial t} q.$$

Легко видеть, что

V $$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}.$$

3. Дифференцируя по t произведение $(\bar{a} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{e}\})$ имеем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{a} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{e}\}) = \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{e}\}\right) + \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} \cdot \{\bar{e} \cdot \bar{a}\}\right) + \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} \cdot \{\bar{a} \cdot \bar{b}\}\right) =$$
$$= (\bar{a} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{e}\})\left[\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \cdot \bar{h}_1\right) + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \cdot \bar{h}_2\right) + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \cdot \bar{h}_3\right)\right].$$

Так как при

$$t = t_0, \quad \bar{a} = \bar{h}_1 = i, \quad \bar{b} = \bar{h}_2 = j, \quad \bar{e} = \bar{h}_3 = q, \quad \bar{v} = \bar{v}_0,$$

то

$$(\bar{a} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{e}\}) = 1$$

и

VI $$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{a} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{e}\}) = \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} \cdot i\right) + \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial y} \cdot j\right) + \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial z} \cdot q\right) = \operatorname{div} v_0.$$

Из формул IV и V имеем, что

$$\left(\frac{d\bar{h}_1}{dt} \cdot \bar{a}\right) = -\left(\bar{h}_1 \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{d\bar{h}_1}{dt} \cdot \bar{b}\right) = -\left(\bar{h}_1 \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right),$$
$$\left(\frac{d\bar{h}_1}{dt} \cdot \bar{e}\right) = -\left(\bar{h}_1 \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right).$$

Разлагая вектор $\frac{d\bar{h}_1}{dt}$ по векторам $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{h}_3$ имеем следовательно,

$$\frac{d\bar{h}_1}{dt} = \left(\frac{d\bar{h}_1}{dt} \cdot \bar{a}\right)\bar{h}_1 + \left(\frac{d\bar{h}_1}{dt} \cdot \bar{b}\right)\bar{h}_2 + \left(\frac{d\bar{h}_1}{dt} \cdot \bar{e}\right)\bar{h}_3 =$$
$$= -\left(\bar{h}_1 \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)\bar{h}_1 - \left(\bar{h}_1 \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)\bar{h}_2 - \left(\bar{h}_1 \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)\bar{h}_3$$

и такие же равенства для

$$\frac{d\bar{h}_2}{dt}, \quad \frac{d\bar{h}_3}{dt}.$$

Таким образом, при $t = t_0$ имеем, что

VII
$$\frac{d\bar{h}_1}{dt} = -\left[\left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x}\cdot i\right)i + \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial y}\cdot i\right)j + \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial z}\cdot i\right)q\right] =$$
$$= -\operatorname{grad}(\bar{v}_0\cdot i) = -\operatorname{grad}\frac{\partial \xi}{\partial t},$$
$$\frac{d\bar{h}_2}{\partial t} = -\operatorname{grad}(\bar{v}_0\cdot j) = -\operatorname{grad}\frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{d\bar{h}_3}{dt} = -\operatorname{grad}(\bar{v}_0\cdot q) = -\operatorname{grad}\frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

4. Пусть незамкнутая, ограниченная некоторым контуром поверхность S изменяется с изменением параметра t и пусть при $t = t_0$ поверхность будет S_0. Если уравнение поверхности S_0 будет $z = \zeta(x, y)$, то поверхность S, при заданном t, изобразится параметрическими уравнениями I

$$\xi = f_1(t, x, y, z), \quad \eta = f_2(t, x, y, z), \quad \zeta = f_3(t, x, y, z),$$

где $z = \zeta(x, y)$ и переменные x, y изменяются в некоторой, не зависящей от t области A, определяемой поверхностью S_0 и ограничивающим ее контуром.

Написав уравнение поверхности S в виде $\bar{\rho} = \xi i + \eta j + \zeta q$ будем иметь, что векторы $\bar{b}_1$, $\bar{l}_1$ (Begleitvectoren) будут

$$\bar{b}_1 = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)i + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)q = \bar{a} + P\bar{e}$$
$$\bar{l}_1 = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)i + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)j + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)q = \bar{b} + \theta\bar{e},$$

где

$$P = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \theta = \frac{\partial z}{\partial y}$$

и

$$\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\} = \{\bar{a}\cdot\bar{b}\} + P\{\bar{e}\cdot\bar{b}\} + \theta\{\bar{a}\cdot\bar{e}\}$$

и при $t = t_0$ имеем следовательно,

$$\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\} = q - Pi - \theta j = \beta\sqrt{1 + P^2 + \theta^2}.$$

Пусть $\bar{u}$ вектор, определенный в каждой точке поверхности S при всяком t и $\bar{\beta}$ орт нормальный к поверхности и направленный также как и вектор $\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\}$.

Интеграл, изображающий поток векторов $\bar{u}$ через поверхность S, в данный момент t будет равен

$$\int_S (\bar{u}\cdot\bar{\beta})\,dS = \int_A (\bar{u}\cdot\bar{\beta})\sqrt{EG-F^2}\,dx\,dy,$$

где область A не зависит от t.

Так как

$$\bar{\beta} = \frac{\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

то

$$\int (\bar{u}\cdot\beta)\,\bar{d}S = \int_A (\bar{u}\cdot\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\})\,dx\,dy$$

и, следовательно, имеем, что

$$\frac{d}{dt}\int_S (\bar{u}\cdot\beta)\,\bar{d}S = \int_A \frac{d}{dt}(\bar{u}\cdot\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\})\,dx\,dy,$$

где поверхность S, на которую распространен первый интеграл, изменяется с изменением t.

Так как

$$\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\} = \{\bar{a}\cdot\bar{b}\} + P\{\bar{e}\cdot\bar{b}\} + \theta\{\bar{a}\cdot\bar{e}\},$$

то по формулам III имеем, что

$$\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\} = (\bar{a}\cdot\{\bar{b}\cdot\bar{e}\})[\bar{h}_3 - P\bar{h}_1 - \theta\bar{h}_2]$$

и при $t = t_0$, по формулам VI и VII имеем, что

$$\text{VIII}\quad \frac{d}{dt}\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\} = [-Pi-\theta j+q]\operatorname{div}\bar{v}_0 + P\operatorname{grad}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \theta\operatorname{grad}\frac{\partial\eta}{\partial t} - \operatorname{grad}\frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

Умножая такое равенство геометрически на $\bar{u}$ и замечая, что

$$-Pi-\theta j+q = \bar{\beta}\sqrt{1+P^2+\theta^2}$$

имеем, что

$$\left(\bar{u}\cdot\frac{d}{dt}\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\}\right) = (\bar{u}\cdot\bar{\beta})\operatorname{div}\bar{v}_0\sqrt{1+P^2+\theta^2} + P\left(\bar{u}\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) + \theta\left(\bar{u}\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right) - \left(\bar{u}\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) =$$

$$= (\bar{u}\cdot\bar{\beta})\operatorname{div}\bar{v}_0\sqrt{1+P^2+\theta^2} - ((\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0\cdot\bar{\beta})\sqrt{1+P^2+\theta^2},*$$

* Символ $(\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0$ обозначает оператор

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

где $\bar{u} = xi + yj + zq$, приложенный к вектору $\bar{v}_0$.

так как

$$\left(\bar{u}\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)i+\left(\bar{u}\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)j+\left(\bar{u}\cdot\operatorname{grad}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)q=(\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\,\bar{v}_0.$$

Так как при $t=t_0$,

$$\frac{d\bar{u}}{dt}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+(\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\,\bar{u}$$

и

$$\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\}=\bar{\beta}\sqrt{1+P^2+\theta^2},$$

то

$$\operatorname{rot}\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\cdot\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\}\right)=\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot\bar{\beta}\right)+((\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\,\bar{u}\cdot\bar{\beta})\right]\sqrt{1+P^2+\theta^2}.$$

Таким образом, при $t=t_0$ имеем, что

IX
$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\substack{S\\ t=t_0}}(\bar{u}\cdot\bar{\beta})\,dS=$$

$$=\int\limits_{S_0}\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot\bar{\beta}\right)+((\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\,\bar{u}\cdot\bar{\beta})+(\bar{u}\cdot\bar{\beta})\operatorname{div}\bar{v}_0-((\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\,\bar{v}_0\cdot\bar{\beta})\right]dS_0=$$

$$=\int\limits_{S_0}\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot\bar{\beta}\right)+(\bar{u}_0\cdot\bar{\beta})\operatorname{div}\bar{u}+(\operatorname{rot}\{\bar{u}\cdot\bar{v}_0\}\cdot\bar{\beta})\right]dS_0,$$

так как

$$\operatorname{rot}\{\bar{u}\cdot\bar{v}_0\}=\bar{u}\operatorname{div}\bar{v}_0-\bar{v}_0\operatorname{div}\bar{u}+(\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\,\bar{u}-(\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\,\bar{v}_0.$$

5. Рассмотрим интеграл вектора $\{\bar{\beta}\cdot\bar{u}\}$, распространенный по переменной поверхности S. Имеем, что

$$\int\limits_S\{\bar{\beta}\cdot\bar{u}\}\,dS=\int\limits_A\{\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\}\cdot\bar{u}\}\,dx\,dy,$$

где область A от t не зависит.

Так как

$$P=-(\bar{\beta}\cdot i)\sqrt{1+P^2+\theta^2},\quad \theta=-(\bar{\beta}\cdot j)\sqrt{1+P^2+\theta^2},$$
$$1=(\bar{\beta}\cdot q)\sqrt{1+P^2+\theta^2},$$

то формулу VIII можно переписать так

$$\frac{d}{dt}\{\bar{b}_1\cdot\bar{l}_1\}=[\bar{\beta}\operatorname{div}\bar{v}_0-(\bar{\beta}\cdot i)\operatorname{grad}(\bar{v}_0\cdot i)-(\bar{\beta}\cdot j)\operatorname{grad}(\bar{v}_0\cdot j)-$$
$$-(\bar{\beta}\cdot q)\operatorname{grad}(\bar{v}_0\cdot q)]\sqrt{1+P^2+\theta^2}.$$

Так как

$$\operatorname{grad}(\bar{v}_0 \cdot \bar{i}) = (\bar{i} \cdot \operatorname{grad})\bar{v}_0 + \{\bar{i} \cdot \operatorname{rot}\bar{v}_0\}$$
$$\operatorname{grad}(\bar{v}_0 \cdot \bar{j}) = (\bar{j} \cdot \operatorname{grad})\bar{v}_0 + \{\bar{j} \cdot \operatorname{rot}\bar{v}_0\}$$
$$\operatorname{grad}(\bar{v} \cdot \bar{q}) = (\bar{q} \cdot \operatorname{grad})\bar{v}_0 + \{\bar{q} \cdot \operatorname{rot}\bar{v}_0\},$$

то

$$(\bar{\beta} \cdot \bar{i})\operatorname{grad}(\bar{v}_0 \cdot \bar{i}) + (\bar{\beta} \cdot \bar{j})\operatorname{grad}(\bar{v}_0 \cdot \bar{j}) + (\bar{\beta} \cdot \bar{q})\operatorname{grad}(\bar{v}_0 \cdot \bar{q}) = (\bar{\beta} \cdot \operatorname{grad})\bar{v}_0 + \{\bar{\beta} \cdot \operatorname{rot}\bar{v}_0\}$$

и следовательно

$$\left\{\left(\frac{d}{dt}\{\bar{b}_1 \cdot \bar{l}_1\}\right)_{t=t_0} \cdot \bar{u}\right\} = [\{\bar{\beta} \cdot \bar{u}\}\, div\, \bar{v}_0 - \{(\bar{\beta} \cdot \operatorname{grad})\bar{v}_0 \cdot \bar{u}\} - \{\{\bar{\beta} \cdot \operatorname{rot}\bar{v}_0\} \cdot \bar{u}\}]\sqrt{1 + P^2 + \theta^2}.$$

Так как

$$\{\bar{b}_1 \cdot \bar{l}_1\} = \bar{\beta}\sqrt{1 + P^2 + \theta^2},$$

то

$$\left\{\{\bar{b}_1 \cdot \bar{l}_1\} \cdot \frac{d\bar{u}}{dt}\right\} = \left[\left\{\bar{\beta} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right\} + \{\bar{\beta} \cdot (\bar{v}_0 \cdot \operatorname{grad})\bar{u}\}\right]\sqrt{1 + P^2 + \theta^2}.$$

Таким образом, при $t = t_0$ имеем, что

$$\left(\frac{d}{dt}\int_S \{\bar{\beta} \cdot \bar{u}\}\, dS\right)_{t=t_0} = \int_{S_0}\left[\left\{\bar{\beta} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right\} + \{\bar{\beta} \cdot (\bar{v} \cdot \operatorname{grad})\bar{u}\} + \{\bar{\beta} \cdot \bar{u}\}\operatorname{div}\bar{v}_0 - \{(\bar{\beta} \cdot \operatorname{grad})\bar{v} \cdot \bar{u}\} - \{\{\bar{\beta} \cdot \operatorname{rot}\bar{v}_0\} \cdot \bar{u}\}\right] dS_0.$$

X

6. Для нахождения вариации интеграла

$$\int_S \varphi\bar{\beta}\, dS,$$

распространенного по переменной поверхности S, где φ функция, определенная в каждой точке поверхности S перепишем формулу VIII так:

$$\left(\frac{d}{dt}\{\bar{b}_1 \cdot \bar{l}_1\}\right)_{t=t_0} = [\beta\, div\, \bar{v}_0 - (\bar{\beta} \cdot \operatorname{grad})\bar{v}_0 - \{\bar{\beta} \cdot \operatorname{rot}\bar{v}_0\}]\sqrt{1 + P^2 + \theta^2}.$$

Дифференцируя по t равенство

$$\int_S \varrho\bar{\beta}\,dS = \int_\Lambda \varrho\{\bar{b}_1 \cdot \bar{l}_1\}\,dx\,dy$$

и замечая, что

$$\{\bar{\beta}\cdot\bar{l}_1\} = \bar{\beta}\sqrt{1+P^2+\theta^2}$$

имеем, что при $t = t_0$

$$\text{XI}\quad \frac{d}{dt}\int_{t=t_0} \varrho\bar{\beta}\,dS = \int_{S_0}[\varrho\bar{\beta}\operatorname{div}\bar{v}_0 - \varrho(\bar{\beta}\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0 - \varrho\{\bar{\beta}\cdot\operatorname{rot}\bar{v}_0\} + \frac{d\varrho}{dt}\bar{\beta}]\,dS_0.$$

7. Пусть незамкнутая спрямляемая кривая L изменяется с изменением параметра t и пусть при $t = t_0$ кривая будет L_0. Если уравнения кривой L_0 будут $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, $z = z(\lambda)$, где λ длина дуги кривой L_0, отсчитанная от некоторой точки, то кривая L изобразится параметрическими уравнениями I

$$\xi = f_1(t, x, y, z), \quad \eta = f_2(t, x, y, z) \quad \zeta = f_3(t, x, y, z),$$

где

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad z = z(\lambda).$$

Рассмотрим интеграл, изображающий циркуляцию вектора $\bar{u}$ вдоль кривой L

$$\int_L (\bar{u}\cdot\bar{\sigma})\,ds.$$

где

$$\bar{\sigma} = \frac{d\xi}{ds}i + \frac{d\eta}{ds}j + \frac{d\zeta}{ds}q$$

орт, касательный к кривой L и s длина дуги кривой L и

$$\bar{u} = Xi + Yj + Zq.$$

Имеем, что

$$\int_L (\bar{u}\cdot\bar{\sigma})\,ds = \int_L X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta = \int_{l_1}^{l_2}\left(X\frac{d\xi}{d\lambda} + Y\frac{d\eta}{d\lambda} + Z\frac{d\zeta}{d\lambda}\right)d\lambda =$$

$$= \int_{l_1}^{l_2}(\bar{u}\cdot\bar{\sigma}_1)\,d\lambda,$$

где пределы интеграла l_1 и l_2 не зависят от t и

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{d\xi}{d\lambda}i + \frac{d\eta}{d\lambda}j + \frac{d\zeta}{d\lambda}q.$$

Дифференцируя ξ, η, ζ по λ, легко видеть, что

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{a}\frac{dx}{d\lambda} + \bar{b}\frac{dy}{d\lambda} + \bar{e}\frac{dz}{d\lambda}$$

и

$$\frac{d\bar{\sigma}_1}{dt} = \frac{\partial\bar{a}}{\partial t}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial\bar{b}}{\partial t}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial\bar{e}}{\partial t}\frac{dz}{d\lambda} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\frac{dz}{d\lambda} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial\lambda}.$$

Если

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{dx}{d\lambda}i + \frac{dy}{d\lambda}j + \frac{dz}{d\lambda}q,$$

то

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\lambda} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\frac{dz}{d\lambda} = (\bar{\sigma}_2 \cdot \operatorname{grad})\bar{u}$$

и следовательно

$$\left(\bar{u}\cdot\frac{d\bar{\sigma}_1}{dt}\right) = \left(\bar{u}\cdot\frac{\partial\bar{v}}{\partial\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\bar{u}\cdot\bar{v}) - \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\lambda}\cdot\bar{v}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\bar{u}\cdot\bar{v}) - ((\bar{\sigma}_2\operatorname{grad})\bar{u}\cdot\bar{v}).$$

Так как

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + (\bar{v}\cdot\operatorname{grad})\bar{u},$$

то

$$\left(\frac{d\bar{u}}{dt}\cdot\bar{\sigma}_1\right) = \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot\bar{\sigma}_1\right) + ((\bar{v}\cdot\operatorname{grad})\bar{u}\cdot\bar{\sigma}_1).$$

При $t = t_0$ имеем, что $\bar{v} = \bar{v}_0$ и $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$.

Таким образом, дифференцируя по t равенство

$$\int_L (\bar{u}\cdot\bar{\sigma})\,ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\bar{u}\cdot\bar{\sigma}_1)\,d\lambda$$

имеем, при $t = t_0$, что

$$\frac{d}{dt}\int_{\substack{L\\ t=t_0}} (\bar{u}\cdot\bar{\sigma})\,ds = (\bar{u}\cdot\bar{v}_0)_2 - (\bar{u}\cdot\bar{v}_0)_1 +$$

XII

$$+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot\bar{\sigma}_2\right) + ((\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\bar{u}\cdot\bar{\sigma}_2) - ((\bar{\sigma}_2\cdot\operatorname{grad})\bar{u}\cdot\bar{v}_0)\right]d\lambda,$$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{dx}{d\lambda}i + \frac{dy}{d\lambda}j + \frac{dz}{d\lambda}q$$

орт, касательный к кривой L_0.

Если

$$\bar{u} = \bar{v},$$

то

$$(\bar{v}_0 \cdot \operatorname{grad})\bar{v}_0 = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_{t=t_0} - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right)_{t=t_0} = w_0 - \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right)_{t=t_0},$$

так как

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \operatorname{grad})\bar{v}.$$

Далее имеем, что

$$(\bar{\sigma}_2 \cdot \operatorname{grad})\bar{v}_0 = \frac{dx}{d\lambda}\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} + \frac{dy}{d\lambda}\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial y} + \frac{dz}{d\lambda}\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial z} = \frac{d\bar{v}_0}{d\lambda}$$

и следовательно

$$\left((\bar{\sigma}_2 \cdot \operatorname{grad})\bar{v}_0 \cdot \bar{v}_0\right) = \left(\frac{d\bar{v}_0}{d\lambda} \cdot \bar{v}_0\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}(\bar{v}_0 \cdot \bar{v}_0) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\bar{v}_0^2.$$

Таким образом из формулы XII имеем формулу для вариации циркуляции скорости вдоль переменного пути L

$$\frac{d}{dt}\int_L (\bar{v} \cdot \bar{\sigma})\, ds = \frac{1}{2}\left[v_{0,2}^2 - v_{0,1}^2\right] + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\bar{w}_0 \cdot \bar{\sigma}_2)\, d\lambda,$$

где

$$\bar{w}_0 = \left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_{t=t_0}$$

вектор ускорения.

8. Рассмотрим интеграл

$$\int_L \{\bar{u} \cdot \bar{\sigma})\}\, ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \{\bar{u} \cdot \bar{\sigma}\}\, d\lambda,$$

где

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{d\xi}{d\lambda} i + \frac{d\eta}{d\lambda} j + \frac{d\zeta}{d\lambda} q.$$

Так как

$$\left\{\bar{u} \cdot \frac{d\bar{\sigma}_1}{dt}\right\} = \left\{\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda}\right\} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\{\bar{u} \cdot \bar{v}\} - \{(\bar{\sigma}_2 \cdot \operatorname{grad})\bar{u} \cdot \bar{v}\}$$

и

$$\left\{\frac{du}{dt} \cdot \bar{\sigma}_1\right\} = \left\{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot \bar{\sigma}_1\right\} + \{(\bar{v} \cdot \operatorname{grad})\bar{u} \cdot \bar{\sigma}_1\},$$

то при $t = t_0$ имеем, что

$$\frac{d}{dt}\int_{\substack{L\\ t=t_0}} \{\bar{u}\cdot\bar{\sigma}\}\,ds = \{\bar{u}\cdot\bar{v}_0\}_2 - \{\bar{u}\cdot\bar{v}_0\}_1 +$$

XIII

$$+\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\left\{\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot\bar{\sigma}_2\right\} + \{(\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\bar{u}\cdot\bar{\sigma}_2\} - \{(\bar{\sigma}_2\cdot\operatorname{grad})\bar{u}\cdot\bar{v}_0\}\right]d\lambda,$$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{dx}{d\lambda}i + \frac{dy}{d\lambda}j + \frac{dz}{d\lambda}q$$

орт касательный к кривой L_0.

9. Дифференцируя равенство

$$\int_L \varphi\bar{\sigma}\,ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\varphi\bar{\sigma}_1\,ds,$$

где φ функция, определенная в каждой точке кривой L имеем, при $t = t_0$, что

$$\frac{d}{dt}\int_{\substack{L\\ t=t_0}}\varphi\bar{\sigma}\,ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{d\varphi}{dt}\bar{\sigma}_2\,d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\varphi\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial\lambda}\,d\lambda.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[\varphi\cdot\bar{v}_0] = \varphi\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial\lambda} + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\bar{v}_0,$$

то

$$\varphi\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}[\varphi\bar{v}_0] - (\bar{\sigma}_2\cdot\operatorname{grad}\varphi)\bar{v}_0$$

и следовательно

XIV $$\frac{d}{dt}\int_{\substack{L\\ t=t_0}}\varphi\bar{\sigma}\,ds = \varphi_1\bar{v}_{0,1} - \varphi_2\bar{v}_{0,2} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\frac{d\varphi}{dt}\bar{\sigma}_2 - (\bar{\sigma}_2\cdot\operatorname{grad}\varphi)\bar{v}_0\right]d\lambda.$$

10. Пусть интеграл

$$\int U(t,\xi,\eta,\zeta)\,d\tau,$$

где U функция, определенная в каждой точке объема τ, распространен, по объему τ, зависящему от t.

Пусть при $t = t_0$ объем τ будет τ_0 и предположим, что между точками ξ, η, ζ объема τ и точками x, y, z объема τ_0 существует взаимно однозначное соответствие, заданное формулами I.

Преобразуя интеграл

$$\int U(t, \xi, \eta, \zeta)\, d\tau,$$

по формулам I к новым переменным x, y, z имеем, что

$$\int_{\tau} U(t, \xi, \eta, \zeta)\, d\tau = \int_{\tau_0} U(t, f_1, f_2, f_3) J d\tau_0,$$

где область интегрирования τ_0 не зависит от t и

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial \xi}{\partial y}, & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x}, & \frac{\partial \zeta}{\partial y}, & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} = (\bar{a} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{l}\}).$$

Определитель J можно считать положительным, так как при $t = t_0$

$$J = (i \cdot \{j \cdot q\}) = 1.$$

Дифференцируя интеграл по t и замечая, что

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \operatorname{grad} U)$$

и при $t = t_0$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{a} \cdot \{\bar{b} \cdot \bar{l}\}) = \operatorname{div} \bar{v}_0,$$

имеем, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\substack{\tau \\ t=t_0}} U(t, \xi, \eta, \zeta)\, d\tau = \int_{\tau_0} \left[U \operatorname{div} \bar{v}_0 + \frac{\partial u}{\partial t} + (\bar{v}_0 \cdot \operatorname{grad} U) \right] d\tau_0$$

Так как

$$\operatorname{div} U\bar{v}_0 = U \operatorname{div} \bar{v}_0 + (\bar{v}_0 \cdot \operatorname{grad} U),$$

то

XV $$\frac{d}{dt} \int_{t=t_0} U(t, \xi, \eta, \zeta)\, d\tau = \int_{\tau_0} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} U\bar{v}_0 \right] d\tau_0$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_{t=t_0} U(t, \xi, \eta, \zeta)\, d\tau = \int_{\tau_0} \left[\frac{dU}{dt} + U \operatorname{div} \bar{v}_0 \right] d\tau_0,$$

так как

$$\frac{dU}{dt} + U \operatorname{div} \bar{v}_0 = \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} U\bar{v}_0.$$

11. Для дифференцирования интеграла

$$\int_{\tau} \bar{u} d\tau,$$

где $\bar{u}$ вектор зависящий от t и определенный при всяком t, в каждой точке ξ, η, ζ, переменного объема τ достаточно заметить, что при $t = t_0$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{v}_0 \cdot \operatorname{grad}) \bar{u}.$$

Дифференцируя равенство

$$\int_{\tau} \bar{u} d\tau = \int_{\tau_0} \bar{u} J d\tau_0$$

имеем, следовательно,

XVI $$\frac{d}{dt} \int_{\substack{\tau \\ t=t_0}} \bar{u} d\tau = \int_{\tau_0} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} (\bar{v}_0 \cdot \operatorname{grad}) \bar{u} + \bar{u} \operatorname{div} \bar{v}_0 \right] d\tau_0.$$

12. Для нахождения вариации интеграла

$$\int_{s} \{\bar{\beta} \cdot \bar{u}\} ds,$$

распространенного по замкнутой поверхности воспользуемся формулой Гаусса

$$\int_{s} \{\bar{\beta} \cdot \bar{u}\} ds = \int_{\tau} \operatorname{rot} \bar{u} d\tau,$$

предполагая, что орт $\bar{\beta}$ направлен по внешней нормали к поверхности.

Имеем, что

$$\frac{d}{dt} \int_{s} \{\bar{\beta} \cdot \bar{u}\} ds = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \operatorname{rot} \bar{u} \, d\tau$$

и по формуле XVI имеем, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \int_{\substack{\tau \\ t=t_0}} \operatorname{rot} \bar{u} \, d\tau = \int_{\tau_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \bar{u} + (\bar{v}_0 \cdot \operatorname{grad}) \operatorname{rot} \bar{u} + \operatorname{div} \bar{v}_0 \operatorname{rot} \bar{u} \right] d\tau_0.$$

Предыдущий интеграл, распространенный по объему τ_0 преобразуем в интеграл по поверхности s_0, ограничивающей объем τ_0.

Так как

$$\operatorname{rot}\{\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\bar{v}_0\}=\operatorname{rot}\bar{u}\operatorname{div}\bar{v}_0-\bar{v}_0\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{u}+(\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\operatorname{rot}\bar{u}-(\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0$$

и

$$div\operatorname{rot}\bar{u}=0,$$

то

$$(\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\operatorname{rot}\bar{u}+\operatorname{div}\bar{v}_0\operatorname{rot}\bar{u}=\operatorname{rot}\{\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\bar{v}_0\}+(\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0.$$

Если

$$\bar{v}_0=X_1 i+Y_1 j+Z_1 q,$$

то

$$(\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0=(\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\operatorname{grad}X_1)i+(\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\operatorname{grad}Y_1)j+(\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\operatorname{grad}Z_1)q.$$

Так как

$$\operatorname{div}\{\bar{u}\cdot\operatorname{grad}X_1\}=(\operatorname{grad}X_1\cdot\operatorname{rot}\bar{u})-(\bar{u}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{grad}X_1)$$

и

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}X_1=0,$$

то

$$(\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0=\operatorname{div}\{\bar{u}\cdot\operatorname{grad}X_1\}i+\operatorname{div}\{\bar{u}\cdot\operatorname{grad}Y_1\}j+\operatorname{div}\{\bar{u}\cdot\operatorname{grad}Z_1\}q.$$

Таким образом предыдущий интеграл будет равен

$$\int_{\tau_0}\left[\operatorname{rot}\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\operatorname{rot}\{\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\bar{v}_0\}\right]d\tau_0+i\int_{\tau_0}\operatorname{div}\{\bar{u}\cdot\operatorname{grad}X_1\}\,d\tau_0+$$
$$+j\int_{\tau_0}\operatorname{div}\{\bar{u}\cdot\operatorname{grad}Y_1\}\,d\tau_0+q\int\operatorname{div}\{\bar{u}\cdot\operatorname{grad}Z_1\}\,d\tau_0.$$

Пользуясь формулами Гаусса

$$\int_\tau\operatorname{rot}\bar{u}\,d\tau=\int_s\{\bar{\beta}\cdot\bar{u}\}\,ds$$

и

$$\int\operatorname{div}\bar{u}d\tau=\int_s(\bar{u}\cdot\bar{\beta})\,ds,$$

имеем, что

$$\frac{d}{dt}\int_{t=t_0}\operatorname{rot}\bar{u}\,d\tau=\int_{s_0}\{\bar{\beta}\cdot\bar{u}\}+\{\bar{\beta}\cdot\{\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\bar{v}_0\}\}\,ds_0+i\int_{s_0}(\bar{\beta}\cdot\{\bar{u}\cdot\operatorname{grad}X_1\})\,ds_0+$$
$$+j\int_{s_0}(\bar{\beta}\cdot\{\bar{u}\cdot\operatorname{grad}Y_1\})\,ds_0+q\int_{s_0}(\bar{\beta}\cdot\{\bar{u}\cdot\operatorname{grad}Z_1\})\,ds_0$$

и следовательно

$$\text{XVII}\quad \frac{d}{dt}\int\limits_{\substack{s_0\\ t=t_0}} \{\bar{\beta}\cdot\bar{u}\}\,ds = \int\limits_{s_0} [\{\bar{\beta}\cdot\bar{u}\} + \{\bar{\beta}\cdot\{\operatorname{rot}\bar{u}\cdot\bar{v}_0\}\} + (\{\bar{\beta}\cdot\bar{u}\}\operatorname{grad})\bar{v}_0]\,ds_0.$$

Для вариации интеграла

$$\int \varphi\bar{\beta}\,ds,$$

распространенного по замкнутой поверхности воспользуемся формулой

$$\int\limits_{s} \varphi\bar{\beta}\,ds = \int\limits_{\tau} \operatorname{grad}\varphi\,d\tau.$$

По формуле XVI имеем, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\substack{s\\ t=t_0}} \varphi\bar{\beta}\,ds = \frac{d}{dt}\int\limits_{\substack{\tau_0\\ t=t_0}} \operatorname{grad}\varphi\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tau_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi + (\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\varphi\operatorname{div}\bar{v}_0\right]d\tau_0.$$

Предыдущий интеграл, распространенный по объему τ_0 преобразуем в интеграл, распространенный по поверхности s_0, ограничивающей объем τ_0.

Так как

$$\operatorname{rot}\{\operatorname{grad}\varphi\cdot\bar{v}_0\} = \operatorname{grad}\varphi\operatorname{div}\bar{v}_0 - \bar{v}_0\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi + (\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\operatorname{grad}\varphi - (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0,$$

то

$$(\bar{v}_0\cdot\operatorname{grad})\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\varphi\operatorname{div}\bar{v}_0 = \operatorname{rot}\{\operatorname{grad}\varphi\cdot\bar{v}_0\} + \bar{v}_0\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi + (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0.$$

Рассмотрим вектор $\Delta^2\varphi\bar{v}_0$, где Δ^2 оператор Лапласа и

$$\varphi\bar{v}_0 = \varphi X_1 i + \varphi Y_1 j + \varphi Z_1 q.$$

Имеем, что

$$\Delta^2\varphi X_1 = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi X_1 = \operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}X_1] + \operatorname{div}[X_1\operatorname{grad}\varphi] = \operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}X_1] + X_1\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi + (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}X_1)$$

и

$$\Delta^2\varphi\bar{v}_0 = \operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}X_1]\,i + \operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}Y_1]\,j + \operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}Z_1]\,q + \bar{v}_0\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi + (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0.$$

Так как

$$\Delta^2 \varphi \bar{v}_0 = \operatorname{grad}\operatorname{div}\varphi\bar{v}_0 - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\varphi\bar{v}_0,$$

то

$$\bar{v}_0 \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi + (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0 = \operatorname{grad}\operatorname{div}\varphi\bar{v}_0 - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\varphi\bar{v}_0 - \operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}X_1]\,i - \operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}Y_1]\,j - \operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}Z_1]\,q.$$

Таким образом интеграл, распространенный по объему τ_0 будет равен

$$\int_{\tau_0}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}d\tau_0 + \int_{\tau_0}\operatorname{rot}\{\operatorname{grad}\varphi\cdot\bar{v}_0\}\,d\tau_0 + \int_{\tau_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\varphi\bar{v}_0\,d\tau_0 - \int_{\tau_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\varphi\bar{v}d\tau_0 - i\int_{\tau_0}\operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}X_1]\,d\tau_0 - j\int_{\tau_0}\operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}Y_1]\,d\tau_0 - q\int_{\tau_0}\operatorname{div}[\varphi\operatorname{grad}Z_1]\,d\tau_0.$$

Преобразуя такие интегралы по формулам Гаусса

$$\int\operatorname{grad}\varphi d\tau = \int\varphi\bar{\beta}ds,\ \int\operatorname{rot}\bar{u}\,d\tau = \int\{\bar{\beta}\cdot\bar{u}\}\,ds,\ \int\operatorname{div}\bar{u}\,d\tau = \int(\bar{\beta}\cdot\bar{u})\,ds,$$

имеем, что

$$\frac{d}{dt}\int_{t=t_0}\varphi\bar{\beta}ds = \int_{s_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bar{\beta}ds_0 + \int_{s_0}\{\bar{\beta}\cdot\{\operatorname{grad}\varphi\cdot\bar{v}_0\}\}\,ds_0 + \int_{s_0}\bar{\beta}\operatorname{div}\varphi\bar{v}_0\,ds_0 - \int_{s_0}\{\bar{\beta}\cdot\operatorname{rot}\varphi\bar{v}_0\}\,ds_0 - i\int_{s_0}(\bar{\beta}\cdot\varphi\operatorname{grad}X_1)\,ds_0 - j\int_{s_0}(\bar{\beta}\cdot\varphi\operatorname{grad}Y_1)\,ds_0 - q\int_{s_0}(\bar{\beta}\cdot\varphi\operatorname{grad}Z_1)\,ds_0$$

и следовательно

XVIII $$\frac{d}{dt}\int_{t=t_0}\varphi\bar{\beta}ds = \int_{s_0}\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bar{\beta} + \{\bar{\beta}\cdot\{\operatorname{grad}\varphi\cdot\bar{v}_0\}\} + \bar{\beta}\operatorname{div}\varphi\bar{v}_0 - \{\bar{\beta}\cdot\operatorname{rot}\varphi\bar{v}_0\} - (\bar{\beta}\varphi\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0\Big]ds_0.$$

14. Дифференцируя формулу

$$\int(\bar{\beta}\cdot\bar{u})\,ds = \int\operatorname{div}\bar{u}d\tau$$

и пользуясь формулой XV, имеем, что

$$\frac{d}{dt}\int_{t=t_0}(\bar{\beta}\cdot\bar{u})\,ds = \int\Big[\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\bar{u} + \operatorname{div}[\operatorname{div}\bar{u}\cdot\bar{v}_0]\Big]d\tau_0$$

и, следовательно, имеем

$$\text{XIX} \qquad \frac{d}{dt}\int_{t=t_0}(\bar{\beta}\cdot\bar{u})\,ds = \int_{s_0}\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot\bar{\beta}\right)+(\bar{v}_0\cdot\bar{\beta})\operatorname{div}\bar{u}\right]ds_0,$$

формулу для вариации интеграла

$$\int(\bar{\beta}\cdot\bar{u})\,ds,$$

распространенного по переменной замкнутой поверхности.

15. Рассмотрим еще интеграл

$$\int_L\{\bar{u}\cdot\bar{\sigma}\}\,ds,$$

распространенный по замкнутому контуру L, где $\bar{\sigma}$ орт касательный к кривой L.

Если

$$\bar{u} = Xi + Yj + Zq,$$

то

$$\int_L\{\bar{u}\cdot\bar{\sigma}\}\,ds = i\int_L Ydz - Zdy + j\int_L Zdx - Xdz + q\int_L Xdy - Ydx.$$

Преобразуя интегралы в правой части по формуле Стокса имеем, что

$$\int_L Ydz - Zdy =$$

$$= \int_s\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)(\bar{\beta}\cdot i) - \frac{\partial Y}{\partial x}(\bar{\beta}\cdot j) - \frac{\partial Z}{\partial x}(\bar{\beta}\cdot q) - \frac{\partial X}{\partial x}(\bar{\beta}\cdot i)\right]ds$$

$$\int_L Zdx - Xdz =$$

$$= \int_s\left[-\frac{\partial X}{\partial y}(\bar{\beta}\cdot i) + \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)(\bar{\beta}\cdot j) - \frac{\partial Z}{\partial y}(\bar{\beta}\cdot q) - \frac{\partial Y}{\partial y}(\bar{\beta}\cdot j)\right]ds$$

$$\int Xdy - Ydx =$$

$$= \int\left[-\frac{\partial X}{\partial z}(\bar{\beta}\cdot i) - \frac{\partial Y}{\partial z}(\bar{\beta}\cdot j) + \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)(\bar{\beta}\cdot q) - \frac{\partial Z}{\partial z}(\bar{\beta}\cdot q)\right]ds.$$

и следовательно

$$\int_L\{\bar{u}\cdot\bar{\sigma}\}\,ds =$$

$$= \int[\bar{\beta}\operatorname{div}\bar{u} - (\bar{\beta}\cdot i)\operatorname{grad}X - (\bar{\beta}\cdot j)\operatorname{grad}Y - (\bar{\beta}\cdot q)\operatorname{grad}Z]\,ds.$$

Так как

$$\operatorname{grad}(\bar{\beta}\cdot i)X = (\bar{\beta}\cdot i)\operatorname{grad}X + X\operatorname{grad}(\bar{\beta}\cdot i)$$

и

$$\operatorname{grad}(\bar{\beta}\cdot i) = (i\cdot\operatorname{grad})\bar{\beta} + \{i\cdot\operatorname{rot}\bar{\beta}\},$$

то

$$(\bar{\beta}\cdot i)\operatorname{grad}X = \operatorname{grad}(\bar{\beta}\cdot i)X - X(i\cdot\operatorname{grad})\bar{\beta} - X\{i\cdot\operatorname{rot}\bar{\beta}\}$$

и следовательно

$$(\bar{\beta}\cdot i)\operatorname{grad}X + (\bar{\beta}\cdot j)\operatorname{grad}Y + (\bar{\beta}\cdot q)\operatorname{grad}Z =$$
$$= \operatorname{grad}(\bar{u}\cdot\bar{\beta}) - (\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\bar{\beta} - \{\bar{u}\cdot\operatorname{rot}\bar{\beta}\} = (\bar{\beta}\cdot\operatorname{grad})\bar{u} + \{\bar{\beta}\cdot\operatorname{rot}\bar{u}\},$$

так как

$$\operatorname{grad}(\bar{u}\cdot\bar{\beta}) = (\bar{u}\cdot\operatorname{grad})\bar{\beta} + (\bar{\beta}\cdot\operatorname{grad})\bar{u} + \{\bar{u}\cdot\operatorname{rot}\bar{\beta}\} + \{\bar{\beta}\cdot\operatorname{rot}\bar{u}\}$$

и следовательно

XX $$\int_L \{\bar{u}\cdot\bar{\sigma}\}\,ds = \int_s [\bar{\beta}\operatorname{div}\bar{u} - (\bar{\beta}\cdot\operatorname{grad})\bar{u} - \{\bar{\beta}\cdot\operatorname{rot}u\}]\,ds.$$

Если в формуле XI $\varphi = 1$ и в формуле XX $\bar{u} = \bar{v}$, то имеем формулу

XXI $$\frac{d}{dt}\int_{t=t_0}\bar{\beta}\,ds = \int_{L_0}\{\bar{v}\cdot\bar{\sigma}\}\,ds,$$

где поверхность S ограничена замкнутым контуром L_0 при $t = t_0$.

Если в формуле XIII контур L замкнутый и $\bar{u} = \bar{v}$, то

$$\frac{d}{dt}\int_{\substack{L\\ t=t_0}}\{v\cdot\bar{\sigma}\}\,ds = \int_{L_0}\left[\left\{\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}\cdot\bar{\sigma}_2\right\} + \{(\bar{v}\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0\cdot\bar{\sigma}_2\} - \{(\bar{\sigma}_2\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0\cdot\bar{v}_0\}\right]d\lambda$$

и следовательно

XXII $$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\substack{s\\ t=t_0}}\bar{\beta}\,ds =$$

$$= \int_{L_0}[\{\bar{w}\cdot\bar{\sigma}_2\} + \{(\bar{v}_0\operatorname{grad})\cdot\bar{v}_0\cdot\bar{\sigma}_2\} - \{(\bar{\sigma}_2\cdot\operatorname{grad})\bar{v}_0\cdot\bar{v}_0\}]\,d\lambda,$$

где

$$\bar{w} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t}$$

вектор ускорения и $\bar{\sigma}_2$ орт касательный к кривой L_0.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ЗЕНИТНЫЕ РАССТОЯНИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ НА ПУЛКОВСКОМ ПАССАЖНОМ ИНСТРУМЕНТЕ В ПЕРВОМ ВЕРТИКАЛЕ

А. С. ВАСИЛЬЕВА

I

§ 1. Точность зенитных расстояний в оценках В. Струве

В большом пулковском пассажном инструменте (работы Репсольда), установленном в первом вертикале, наблюдения начинаются одни при положении трубы с юга от гранитного столба, на котором лежит горизонтальная ось, другие с севера. Безразличны ли эти оба положения для результатов измерения зенитных расстояний? или необходима какая-либо поправка?

Всеми наблюдателями в течение 90 лет существования инструмента в Пулкове в первом вертикале постоянно делались попытки определить такую поправку, но она до сих пор не выявлена. Случай будто бы получения ее в 1907 г. из наблюдений 1905—1907 гг. является произволом. Предположение, что для наблюдений, начатых на севере и начатых на юге от столба, поправки равны, но противуположны по знаку правильно только при наличии определенных условий в состоянии инструмента; таких условий в инструменте тогда не было.

Вместе с выводом значения поправок это в настоящем исследовании между прочим устанавливается.

Формулы, схемы наблюдений и вычислений для пассажного инструмента, установленного в первом вертикале, разработаны с мельчайшими подробностями В. Струве и опубликованы им еще в 1842 г. в № 468 Astronomische Nachrichten; там же и также в Известиях С. Петербургской Академии Наук, т. X, 1842 г. и еще в Description de l'Observatoire de Poulkovo 1845 г. мы находим его же подробное описание инструмента и описание разносторонних исследований инструмента.

Из наблюдений звезды o Дракона В. Струве заключил еще в 1842 г., что «азимут инструмента, когда его не касаются, остается неизменным в течение целого года, может быть, в пределах только одной секунды дуги; перемена температуры около 30° между зимними и летними месяцами не оказывает на азимут никакого действия» (стр. 214, № 468, A. N.). Тогда же из $9^1/_2$ месячных наблюдений звезды ε Большой Медведицы В. Струве получил для коллимации c этого инструмента эмпирическую формулу (A. N., стр. 221):

$$c = +0''.692 + 0'.1808\, t + 1.392 \sin(\odot + 195^\circ.12)$$

с вероятной остаточной ошибкой $r_c = \mp 0''.38$ (средняя ошибка $\mu_c = +0''.57$) одного значения коллимации.

Здесь t температуры воздуха, а $\odot$ — долготы солнца.

Присутствие члена с долготою $\odot$ объяснено В. Струве различием тепловых свойств в гранитном столбе и в металле трубы инструмента. Мы полагаем, что В. Струве получил бы вместо сезонного члена член суточный, что нагляднее, если бы свои измеренные коллимации c расположил не по датам, а по часам солнечного времени наблюдений звезды.

Во всяком случае перемены между направлениями оси горизонтальной и оси оптической В. Струве считал несомненными, но «почти абсолютно безразличными для зенитных расстояний звезд, так как в определениях зенитных расстояний всякое изменение исключается при прохождениях звезд немедленной перекладкой трубы». (A. N., № 468, стр. 223).

Что касается собственно точности наблюдения зенитных расстояний, то, сравнив в наблюдении 15 января 1842 г. зенитной звезды υ Большой Медведицы десять значений $z + c$ и десять значений $z - c$ с их соответственными средними, В. Струве получил вероятную ошибку $r = \pm 0''.194$ (ср. ош. $\pm 0''.27$) наблюдения z при каждой отдельной установке нити микрометра; так как установок в каждом наблюдении у В. Струве было 20, то вероятную ошибку окончательного зенитного расстояния в полном наблюдении он оценил в $+\frac{0.194}{\sqrt{20}} = \pm 0''.043$.

Это тот самый метод оценки точности измерений, который применяется всеми и в наше время. В исследовании «Нереальная оценка точности нивеллирований горизонтальной оси в пассажных инструментах»[1] я показал что такая оценка $r = \pm 0''.043$ точности безусловно нереальна, что она

[1] ИОФМ, 1928, №№ 2, 3, 4—5.

много выше действительности. Ведь результат наблюдения определяется не только прохождениями изображений звезд через нити, но и наклонением к горизонту горизонтальной оси и перекладками ея.

§ 2. Метод исследования коллимации

«Коллимацию пассажного инструмента, неизменно установленного в первом вертикале, возможно определить наблюдая в каждой из двух половин первого вертикала прохождения той же самой звезды в двух противуположных положениях инструмента — труба Юг и труба Север, или наоборот. Такое определение коллимации не зависит ни от какого произвольного предположения кроме того, что сама коллимация сохраняет неизменность в течение короткого промежутка времени выполнения наблюдений в двух положениях инструмента. Так как в первом вертикале мы наблюдаем почти зенитные звезды, то и выводимое значение коллимации соответствует только почти вертикальному положению трубы. В таком положении величина, подлежащая определению, обыкновенно искажается полным действием бокового гнутия, которое при трубе, установленной, как наша, на конце оси вращения может быть весьма значительным, несмотря на все старания, которые механик приложил для его ослабления посредством специальной системы противовесов. Боковое гнутие изменяется пропорционально косинусу зенитного расстояния и потому должно быть почти постоянным для всех звезд, проходящих через первый вертикал вблизи зенита».

Таков путь исследований коллимации, намеченный и выполненный в III т. пулковских Publications, в 1870 г. Здесь не упомянуто или упущено самое важное, а именно: надежность выводов коллимации определяется всецело надежностью нивеллирований горизонтальной оси.

§ 3. Постоянно ли боковое гнутие в трубе, на конце оси вращения расположенной?

Во время Шпицбергенского градусного измерения мною в 1899—1901 гг. и позднее при обработке материалов измерения были сделаны многочисленные определения бокового гнутия в двух больших инструментах Бамберга (№ 7379 и № 7380) с трубою, расположенною на конце горизонтальной оси вращения, и в двух инструментах с трубою, расположенною посредине оси (Гербста № 11 и Траутона и Симмса). Совокупность определений создает убеждение полного постоянства бокового гнутия в течение наблюдения.

Измерения коллимации c по Полярной звезде (α Малой Медведицы), имеющей на Шпицбергене зенитное расстояние около 10° и по земным

предметам в зенитных расстояниях около 90° дали для бокового гнутия, например, такие значения из моих наблюдений:

Боковое гнутие в инструменте Бамберга № 7379.

Годы	c	n	
1899	10.07	20	на станции Ли
1900	10.49	125	» » Геджехог
1900	10.66	160	» » Сванберг
1901	10.84	168	» » Баклунд
1901	11.73	154	» » Чернышев

n означает количество определений.

Для центральной и прямой трубы в инструменте Траутона и Симмса боковое гнутие получилось все-таки не малым: $c = 6''.39$ из 150 определений на станции Гельвольд.

В инструменте Бамберга № 7380 боковое гнутие оказалось $c = 10''.22$ из 112 определений на станции Агард. Подробные выводы и материал см. в моих шпицбергенских монографиях.[1]

Боковое гнутие оказалось, таким образом, не малым, но удивительно постоянным или медленно возрастающими несмотря на то, что между наблюдательными станциями инструмент № 7379 перевозился по большим неровностям и глыбам ледников, испытывал, упакованный в ящиках, удары и толчки при внезапных остановках саней, при подъемах на горы и при спусках; даже на одной и той же наблюдательной станции вследствие наступавших бурь, снегопада и дождя горизонтальная ось с трубою многократно снималась с подставок вертикальной оси; обе части укладывались в ящики, и ось с трубою и нижняя часть; потом при улучшении погоды все снова устанавливалось.

При определениях бокового гнутия в универсальных инструментах и на Шпицбергене и вообще повсюду самым важным обстоятельством является то, что ошибка показаний уровня на горизонтальной оси умножается на катангенс зенитного расстояния; котангенс же на Шпицбергене для полярной звезды близок к 5,6. Таким образом ошибки показаний накладного на оси уровня вместе с неправильностями цапф горизонтальной оси, умноженные почти на 6, прикладываясь к значениям бокового гнутия создают впечатление его неустойчивости.

[1] В опубликованных монографиях смотреть: A. S. Wassiliew. Observations au cap Lee; idem. Observations au mont Hedgehog; idem. Observations au mont Backlund; idem. Observations au mont Tschernyschew. В 1914 г. вследствие войны печатание обработок градусного измерения и исследований остановилось и по независящим от автора причинам до сих пор не начато. Исследования инструментов предполагалось собрать в особой монографии. См. план, опубликованный в Observations au cap Lee, p. 9.

В первом вертикале ошибки нивеллирования оси умножаются на коэффициенты близкие к единице, это исследованиям благоприятствует; но в пулковском пассажном инструменте точность инструмента много выше, чем точность названных инструментов перекосных; с требованиями высокой точности возрастают для бокового гнутия и трудности исследований.

§ 4. Первая установка задачи

В 1870 г. в пулковских Publications, т. III, при переобработке наблюдений В. Струве (1840, 6—1843, 4) и Ома (1861, 7—1863, 9) была допущена «возможность (стр. 197), хотя и очень маловероятная, что боковое гнутие, следовательно, и коллимация в собственном смысле не точно одинаковы в двух положениях инструмента; другими словами, угол, образуемый оптической осью с осью вращения, не один и тот же когда труба находится на южной стороне от столба или на северной. В таком случае зенитные расстояния z (абсолютные), даваемые нашим пассажным инструментом в первом вертикале, могут быть искажены маленькой постоянной ошибкой, каковая, следовательно, ни в малейшей мере не могла искажать этим точность измерений относительных, а в Пулкове этот инструмент в таких относительных определениях только и применяется». — Вопрос с отчетливостью был поставлен в 1870 г., до настоящего времени он оставался неразрешенным. Допускался, следовательно, случай частный: разность $c_{\text{юг}} - c_{\text{север}}$ постоянна.

§ 5. Как разрешалась задача в 1870 г.?

Попыток разрешить задачу предыдущего параграфа было не мало, но всё время всё внимание направлялось на установление зависимости коллимации от температуры вообще, от температуры двух ветвей гранитного столба, от теплового обмена между гранитом столба и металлом трубы. Это мы видим прежде всего в вышеприведенной формуле 1842 г. В. Струве. В 1870 г. в Publications de l'Observatoire de Poulkovo, т. III, находим обширное разностороннее исследование инструмента по наблюдениям 1840, 6 — 1863, 3 гг., составленное при участие Деллена, Кнорре, Аббе, Нюрена. Это исследование пришло к заключениям, что «коллимация имела отменное постоянство» (стр. 201), что «величина $\pm 0''.25$, увеличенная в малой доле случайными ошибками отдельных определений, может характеризовать степень постоянства коллимации в течение многих часов» (стр. 203), что «указанное значение $\pm 0''.25$ изменчивости коллимации содержит в себе

еще и действие направильностей цапфов, которое, хотя и прибавляется прямо к коллимации, однако в определяемых зенитных расстояниях исключается полностью» (стр. 203).

Для температурного коэффициента коллимации получилось на один градус Реомюра:

В период 1840 VIII 25 = 1841 V 9	$v = +0''.088 \pm 0''.020$	(вер. ошибка)
» » 1841 VIII 10 — 1843 VIII 8	$+0.140 \pm 0.014$	
» » 1861 IX 18 — 1862 IX 8	$+0.054 \pm 0.011$	

М. Нюрен, наблюдавший на этом инструменте в 1869, 9—1871, 8, 1875, 5—1879, 0, 1880, 0—1882, 1 гг., опубликовал в 1903 г. в Publications de l'Observatoire de Poulkovo, т. 10 свои исследования инструмента вообще и коллимации в частности на основании наблюдений 1869, 9—1896, 5 гг.

Нюрен вывел температурный коэффициент коллимации отдельно при падениях температуры, при возрастаниях, вывел значения коллимации для нитей сетки первых и для нитей последних; для случаев, когда наблюдения начинались на севере и когда на юге от гранитного столба.

Во всех случаях перемены коллимации Нюрен сопоставлял с переменами температуры (см. т. X, стр. 5—7) и, не получивши отчетливых закономерностей, закончил так: «Но самое удивительное есть то, что коллимация увеличивается от первой нити к последней при наблюдениях начатых на севере, — первая нить XV, — и она же уменьшается при наблюдениях, начатых на юге, — первая нить I. Само собою понятно, что такая разница не может быть приписана влиянию температуры воздуха, которое для обеих половин сетки нитей по необходимости одинаково».

Этот факт, непонятный Нюрену и его удивлявший, получает свое полное объяснение в явлении выделенном мною и названном «последействием горизонтальной оси при ее перекладке». Проявления последействий и в нашем большом и в переносных пассажных инструментах достаточно иллюстрированы мною в исследованиях: «Нереальная оценка точности нивеллирований горизонтальной оси в пассажных инструментах» и «Условия надежного нивеллирования горизонтальной оси в пассажных инструментах».

§ 6. Исследования перемен коллимации М. О. Нюреном

Об исследованиях Нюрена все-таки необходимо сказать подробнее. Пересматривая числа, приведенные Нюреном на стр. 5—7 его исследования, не трудно увидеть, что, вычисляя перемены dc коллимации, он получил

значения величины: «среднее — нить», т. е. значения поправок, а не ошибок: «нить — среднее». Поэтому приведенный выше в § 5 вывод Нюрена, чтобы соответствовать реальности, нуждается в исправлении знака: вместо слова Нюреном же подчеркнутого «увеличивается» следует читать уменьшается и вместо слова уменьшается следует читать увеличивается. Говоря коротко, у Нюрена получилось, что в полном наблюдении

$$\tau_c - \tau_ю$$

уменьшается от первой нити к последней и

$$\tau_ю - \tau_c$$

увеличивается от первой нити к последней, где τ_c и $\tau_ю$ моменты прохождений через инструментальный меридиан при положениях трубы или на севере или на юге от столба, — это моменты, вычисленные из наблюдения прохождений a, b, c, d через одну и ту же нить по формулам

$$\tau = \frac{d+a}{2}$$

и

$$\tau = \frac{c+b}{2}.$$

Заметим еще, что все свое исследование Нюрен построил на формулах:

α) $$d\tau = \frac{a+d}{2} - \frac{b+c}{2} = \frac{d-c}{2} - \frac{b-a}{2},$$

и

β) $$dc = d\tau \sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)},$$

вывод которых и опубликование находим у Ванаха в 1893 г.[1]

Формула (β) выведена в предположении, что перемены в τ возникают только из перемен коллимации, а это, конечно, неверно: перемены могут возникать и из других причин; например, А. М. Ковальский в своем исследовании приписал перемены τ переменам азимута. Поскольку причины у Нюрена спутаны, постольку все громадное по количеству вычислительной работы исследование коллимации, проделанное Нюреном, представляет путаницу. Оттого и температурный коэффициент коллимации получился у Нюрена в самых разнообразных значениях от $-0''.045$ до $+0''.391$ на $1°$ Ц.[2]

[1] B. Wanach. Beobachtungen am Pulkowoer Passageninstrument im ersten Vertical in den Jahren 1890 und 1891 nebst Ableitung der Polhöhenänderung, 1893, p. 75 u. 147—148.

[2] В десятом томе пулковских Publications, 1903, стр. 5.

§ 7. Об исследовании перемен коллимации Б. Ванахом

Опыты Ванаха, с установкой трубы объективом вверх и вниз с выдержкой каждого положения по 45 мин. времени и определением после каждой выдержки значений коллимации по мирам, мною проверены. Получились, действительно, перемены Δc коллимации для положений объектив «внизу — вверху»:

у Ванаха в 1891 VI 10: $H-B = 1''.70, -2''.20, -1''.98, -2''.40,$
$-2.48, -3.14, -1.70, -0.42$
у Васильева в 1907 XI 27: $H-B = -0''.99, -0''.38, -0''.09, -0''.24, -0''.39,$
$-0.39, -0.33, -0.44, -0.48.$
» » » 1907 XII 3: $H-B = -0''.00, -0''.29, -0''.31, -0''.15,$
$-0\ 02, +0.24.$

Ванах выбрал условия исключительные: температуру воздуха в течение недели около $+5°$ с малыми переменами и быстрое поднятие ее в день опыта до $+13°$ при сильном ветре и открытых люках в зале наблюдений. Мои опыты проделаны с промежутками в 1 час времени в случайные дни, пасмурные, при закрытых люках, с расчетом только на ежедневный суточный максимум температуры после полудня.

Несомненно, и Ванаха и мои опыты иллюстрируют перемены именно коллимации в условиях Ванаха до $2''$ и даже до $3''$, — перемены, возникшие из разностей температуры в металле трубы и в граните столба, но эти опыты никак не соответствуют положению трубы и состоянию инструмента, именно, во время наблюдений, когда объектив всегда вверху, а труба при перекладке отклоняется от столба совсем мало и только на $1—1^1/_2$ минуты времени. Ведь вся постоянная часть коллимации и вся одинаковая часть ея перемены исключается методом наблюдений с двумя перекладками.

А коэффициент изменений коллимации от температуры? — Ванах из своих наблюдений 1890—1891 гг. вывел его двумя путями: 1) из прохождений звезд, пользуясь формулами α и β (стр. 147 у Ванаха), и 2) из отсчетов мир. По первому методу для температурного коэффициента получились у Ванаха значения от $+0''.018$ до $+0''.397$, т. е. такого же характера, как выше нами описанные, но в действительности позже полученные значения Нюрена.

Окончательно же Ванах получил:

По мирам: $\frac{\Delta c}{\Delta t} = +0''.140 \pm 0''.018$ По звездам: $\frac{\Delta F}{\Delta t} = +0''.276 \pm 0''.018$

Реальность значения $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ несомненна, оно получено без формул α и β, простым сопоставлением значений c с температурами; оно к тому же совпадает и с приведенным нами выше выводом В. Струве и с значениями выведенными в 1870 г. из наблюдений 1840—1863 гг. Значения же Ванаха $\frac{\Delta F}{\Delta t}$ и все значения Нюрена в пулковских Publications, т. X, необходимо признавать неверными вследствие ошибочной установки основ исследования.

§ 8. Разность Ю — С в наблюдениях 1905. 0—1906. 7 гг.

Первые наблюдения на Пулковском зенит-телескопе в 1904. 8—1905. 7 г. выявили у И. В. Бонсдорфа систематическую разность, впоследствии в таком размере неподтвердившуюся:

$$\text{Запад} - \text{Восток} = +0''.08 \pm 0''.03,^1$$

т. е. наблюдения, начатые при трубе на западе, давали зенитные расстояния бо́льшие, чем наблюдения, начатые на востоке. После того и С. К. Костинский вывел из своих и Ф. Витрама наблюдений 1905. 0—1906. 7 гг. на пассажном инструменте в первом вертикале подобную же разность

$$\text{Юг} - \text{Север} = +0''.075 \pm 0''.020,$$

т. е. наблюдения, начатые при трубе с юга от столба, дали зенитные расстояния бо́льшие, чем начатые с северной стороны от столба. Отметим здесь же, что средняя ошибка этого вывода $\pm 0''.020$ действительности не соответствует: вследствие не математической обработки материала она получались слишком малой. При правильной обработке того же материала

$$\text{Юг} - \text{Север} = +0''.074 \pm 0''.051,$$

— это мы увидим ниже.

«Причину этой систематической разности можно искать, разъяснено в статье С. К. Костинского, в изменениях второго порядка коллимации, которые производятся тепловым выравниванием между трубой и столбом (ср. Nyren, Publications, т. X, введение, стр. 6—8). Не задерживаясь здесь на этом вопросе, мы окончательно принимаем поправку для наблюдений типа ЮС $= -0''.037$ и для типа СЮ $= +0''.037$».

1 См. Mitt. des Obs. von Poulkovo, 1906, стр. 97.

Разъяснение причины разности Ю — С изложено так, как-будто в указываемом исследовании Нюрена вопрос разрешен полностью, а между тем из исследований Нюрена — мы это видели выше — не получается никаких выводов, да и сам Нюрен никаких выводов не сделал. Следовательно, ссылка сделана на несуществующее. Далее мы спрашиваем, что такое «изменения коллимации второго порядка»? почему для уничтожения разности Ю — С должно делить ее в отношении $\frac{1}{2}$, а не в каком-либо другом отношении $\frac{m}{n}$ из бесчисленного количества возможных допущений?

Таким разъяснением вопрос только запутывается, заблуждение укрепляется; нет оснований признавать поправки —0″.037 и +0″.037 реальностью.

§ 9. Заключения в результате исследований 1843, 1870 и 1903 гг.

В Aberration des étoiles fixes, 1843 г. у В. Струве на стр. 2 читаем:

«Я убежден, что доказал, что положения звезд, данные инструментом, находятся не только между собою в чрезвычайном согласии, но свободны от всякой постоянной ошибки, так как действия, которым я следовал в наблюдениях, должны исключить всякое случайное состояние инструмента при пользовании им в положениях обратных и симметричных».

В 1903 г. М. Нюрен свои обширные исследования коллимации — о них дважды сказано выше — заключил так:

«Как бы то ни было, можно быть убежденным, что эти малые колебания, если они сколько-нибудь и влияют на зенитные расстояния, исключаются полностью в среднем из наблюдений, начинаемых попеременно на юге и на севере от столба, принцип всегда соблюдавшийся, когда дело идет о результатах крайней точности» (Publications, т. X, p, 8).

Если к этим двум субъективным убеждениям прибавим ограничение — оговорку авторов исследования 1870 г. (в III томе Publications), что «инструмент в Пулкове применяется только для определений относительных», то в этих трех заключениях, сделанных в 1843, 1870 и 1993 гг. после обширнейших исследований не трудно усмотреть признание безнадежности в попытках определить ту «маленькую ошибку, которая, может быть, искажает абсолютные зенитные расстояния, даваемые нашим пассажным инструментом в первом квартале».

Так ли это? Действительно ли нет возможности определить эту «маленькую постоянную ошибку» и действительно ли она в симметричном процессе наблюдений всегда исключается?

§ 10. Избранный метод исследования

Мною найдена возможность разрешить выше поставленные вопросы и полученное решение проверить. Дело идет о выявлении крайне малых перемен в зенитных расстояниях. Для исследования я применил тот самый метод, которым в 1902—1903 гг. я с успехом выявил систематические искажения, внесенные в пять горизонтальных направлений Шпицбергенского градусного измерения универсальным инструментом Гербста № 11, известным под именем Пулковского горизонтального круга. В том исследовании я измерял одни и точно те же самые направления разными сторонами исследуемого инструмента, т. е. при различных его установках, и еще двумя другими надежными инструментами; здесь для сравнений мною избран Пулковский зенит-телескоп.

В 1908. 6—1911. 5 гг. я наблюдал зенитные расстояния близкой к зениту звезды δ Кассиопеи на пассажном инструменте в первом вертикале. Л. И. Семенов параллельно то же самое наблюдал на зенит-телескопе. Геодезическая разность по широте между двумя инструментами была измерена Семеновым при моем участии. Одновременные измерения зенитных расстояний в меридиане звезды δ Кассиопеи двумя точнейшими инструментами должны были дать разности Δz свободные от колебаний широты и вообще свободные от всяких сил, вне каждого инструмента одновременно действующих. Геодезическое приведение не трудно ввести, это постоянная разность:

$$\varphi_{\text{пи}} = \varphi_{\text{зт}} + 0''.89.$$

Пассажный инструмент сравнивался с зенит-телескопом еще и в 1907 г. С. К. Костинским в его вышеупомянутом исследовании наблюдений 1905. 0—1906. 7 гг., но только в пользовании разностями Δz и есть сходство между нашими работами, в остальном мой путь исследования иной. Поэтому я и начинаю исследование с переработки того самого материала, который уже раз использован С. К. Костинским и им же опубликован. Результаты наблюдений на зенит-телескопе опубликованные я принимаю, как обработанные окончательно.

§ 11. Наше решение задачи по наблюдениям 1905, 0—1906, 7 гг.

В Mitteilungen der Nikolaï-Hauptsternwarte zu Pulkovo № 17, 1907 г. в статье С. К. Костинского в последнем столбце таблицы наблюдений даны значения $\Delta z =$ пасс. инстр. — зен. тел. разностей зенитных

расстояний. Вычтя из Δz геодезическое приведение $d\varphi = 0''.89$, делаем гипотезу, что величины

$$d = \Delta z - 0''.89$$

в 1905, 0—1906, 7 г. составились из сложения следующих воздействий: 1) ошибок случайных λ, 2) неизвестного систематического искажения s, возникающего из конструкции пассажного инструмента, когда наблюдение начиналось с трубою на юге от столба, 3) неизвестного систематического искажения n, производимого конструкцией инструмента, когда наблюдение начиналось при трубе на севере от столба, 4) личной ошибки k наблюдателя Костинского и 5) личной ошибки w наблюдателя Витрама.

Согласно наличию Δz и порядку наблюдений мы получаем 116 линейных уравнений ошибок типа

$$s + n + k + w = d + \lambda,$$

среди которых нет уравнений, содержащих неизвестное n одновременно с s, и уравнений, содержащих неизвестное k одновременно с w. Для ясности эти уравнения с их коэффициентами мы здесь приводим; случайную ошибку λ следует разуметь при всяком d в виде $d + \lambda$; $H - B = \lambda$ означает остаточные ошибки «Наблюдение — Вычисление».

Таблица 1

Уравнения ошибок по наблюдениям 1905.0 — 1906.7 гг.

Дата	s	n	k	w	$d=H$ в 0″.01	$H-B$ в 0″.01	Дата	s	n	k	w	$d=H$ в 0″.01	$H-B$ в 0″.01
1905							1905						
I 21	1		1		+10	+ 3	V 6		1	1		+12	+13
23	1		1		+82	+75	7	1		1		−14	−21
II 3	1		1		− 5	−12	8		1	1		+22	+23
15	1		1		+ 5	− 2	15		1	1		+ 4	+ 5
III 16	1		1		+10	+ 3	16	1		1		−16	−23
17		1	1		− 1	0	25		1	1		−63	−62
18		1	1		+ 4	+ 5	VI 3		1	1		0	+ 1
24	1		1		+13	+ 6	7	1		1		−17	−24
IV 12		1	1		+19	+20	18		1	1		+13	+14
30	1		1		+26	+19	22		1		1	− 8	−36

(Продолжение табл. 1)

Дата	s	n	k	w	$d=H$ в 0″.01	$H-B$ в 0″.01	Дата	s	n	k	w	$d=H$ в 0″.01	$H-B$ в 0″.01
1905							1905						
VI 23		1		1	+58	+30	X 17	1		1		+ 2	— 5
24	1			1	+ 8	—28	XI 30		1	1		—20	—19
25		1		1	+37	+ 9	XII 1	1		1		+33	+26
26	1			1	+23	—13	6		1	1		+ 4	+ 5
27		1		1	+ 2	—26	11	1		1		—22	—29
VII 2	1			1	+57	+21	18		1	1		—26	—25
15		1		1	+ 5	—23	1906						
16	1			1	— 3	—39	I 21		1	1		—69	—68
18		1		1	+67	+39	23		1	1		+ 3	+ 4
25	1			1	+39	+ 3	31		1	1		—25	—24
26	1			1	+45	+ 9	II 21		1	1		+44	+45
VIII 1		1			+54	+16	III 7		1	1		+48	—47
14		1	1		+41	+42	14	1		1		+18	+11
18	1		1		— 9	—16	24	1		1		+69	+62
19		1		1	+75	+47	27		1	1		+35	+36
21	1			1	+57	+21	31		1	1		+51	+52
28	1		1		+24	+17	IV 2	1		1		+47	+40
IX 4		1		1	+35	+ 7	5		1	1		—34	—33
5	1			1	+21	—15	8		1	1		+30	+31
8		1		1	+56	+28	12	1		1		—49	—56
9	1			1	+29	— 7	13	1		1		+20	+13
15		1		1	— 3	—31	13		1	1		+29	+30
16	1			1	+42	+ 6	29		1	1		+ 5	+ 6
17		1		1	+25	— 3	V 1	1		1		— 4	—11
18	1			1	— 1	—37	5		1	1		+ 8	+ 9
19		1		1	+36	+ 8	6	1		1		0	— 7
25		1	1		+ 4	+ 5	7	1		1		+51	+44
X 5	1		1		+ 5	— 2	8		1	1		+11	+11
10		1	1		— 1	0	9		1	1		+24	+25
14	1		1		+33	+26	18		1	1		— 2	— 1
16		1	1		—10	— 9	23		1	1		—31	—30

(Продолжение табл. 1)

Дата	s	n	k	w	$d=H$ в 0″.01	$H-B$ в 0″.01	Дата	s	n	k	w	$d=H$ в 0″.01	$H=B$ в 0″.01
1906							1906						
VI 7	1		1		— 4	—11	VII 30	1		1		+46	+39
8	1		1		—27	—34	31		1	1		+ 4	+ 5
12		1	1		— 4	— 3	VIII 2	1		1		—63	—70
14		1	1		+19	+20	9	1		1		+27	+20
16	1		1		—35	—42	14		1	1		+12	+13
18		1	1		—33	—32	15	1		1		+11	+ 4
19	1		1		+24	+17	16		1	1		—18	—17
20		1	1		— 9	— 8	17	1		1		+12	+ 5
21		1	1		—25	—24	18		1	1		+22	+23
22	1		1		— 4	—11	20	1		1		+30	+23
25	1		1		+ 5	— 2	IX 18		1	1		—40	—39
26		1	1		— 7	— 6	19		1	1		—10	—17
27		1	1		—28	—27	26		1	1		—21	—28
28		1	1		+32	+33	29	1		1		—29	—28
VII 2	1		1		+31	+24	30	1		1		+ 2	+ 3
5	1		1		+ 5	— 2							
9		1	1		—43	—42		54	62	92	24	+10.17	+12.39
10	1		1		—15	—22							—12.39
12		1	1		+ 8	+ 9						$[(H-B)^2]=8.52\,87$	
29	1		1		+41	+34						$n=116.$	

Отсюда

Нормальные уравнения:

$$54s + 0n + 43k + 11w = 6''.82 \mid 114.82$$
$$0s + 62n + 49k + 13w = 3.35 \mid 127.35$$
$$43s + 49n + 92k + 0w = 2.61 \mid 186.61$$
$$11s + 13n + 0k + 24w = 7.56 \mid 55.56$$

Сумма первого и второго уравнений равна сумме третьего и четвертого; из этого заключаем, что без какого-либо добавочного допущения возможно определить только два каких-либо из неизвестных и разность между двумя остальными неизвестными.

Изменяя надлежащим образом порядок решения, мы прежде всего получаем нас интересующие:

$$w - k = +0''.2873 \text{ с обратным весом } Q = 0.052539$$

и

$$s - n = +0.0740 \text{ » » » } Q = 0.034650$$

Так как наблюдений Костинского значительно больше, именно 92, чем Витрама, которых только 24, то естественно ради установления определенности предпочитать допущение, что $k = 0$, — это и есть добавочное условие. В этом случае

Нормальные уравнения:

$$\begin{array}{rrrr|r} 54s & +0n & +11w & = +6.82 & 71.82 \\ 0s & +62n & +13w & = +3.35 & 78.35 \\ 11s & +13n & +24w & = +7.56 & 55.56 \end{array}$$

Получается вполне определенное решение

$$\begin{array}{lll} s = +0''.0678 & \text{с обратным весом} & Q = 0.020699 \\ n = -0.0062 & \text{» » » } & = 0.018439 \\ w = +0.2873 & \text{» » » } & = 0.052539 \\ k = 0. & & \end{array}$$

Для суммы квадратов остаточных ошибок имеем:

$$[\lambda\lambda] = [ll] - [al]s - [bl]n - [cl]w = 8.5421 \text{ при } [ll] = 11.1973.$$

Подстановка полученных значений неизвестных в уравнениях ошибок дает остаточные ошибки λ, — они приведены выше в таблице — и

$$[\lambda\lambda] = 8.5287;$$

удовлетворительное совпадение двух вычислений $[\lambda\lambda]$ доказывает безошибочность вычислений.

Средняя ошибка одного l или, что то же, одного Δz

$$\mu_{\Delta z} = \sqrt{\frac{8.5354}{116-3}} = \sqrt{0.075534} = \pm 0''.275,$$

отсюда

$$\mu_s = \pm 0''.040 \qquad \mu_{n-s} = \pm 0''.051$$
$$\mu_n = \pm 0.037 \qquad \mu_{w-k} = \pm 0.063$$
$$\mu_w = \pm 0.063$$

§ 12. Наше решение задачи по наблюдениям 1908. 6—1911. 5 гг.

Переходя к наблюдениям δ Кассиопеи в 1908. 6—1911. 5 гг. отмечаем, что в них сравнение зенитных расстояний проще, чем в наблюдениях 1905. 0—1906. 7 г., так как никакой смены наблюдателей не происходило.

Исходим из предположения, что разности зенитных расстояний, исправленные тем же геодезическим приведением зенит-телескопа к пассажному инструменту,

$$d = \Delta z - 0''.89$$

возникли из сложения 1) случайных ошибок, 2) из искажений s, когда наблюдение начато на юге от столба и 3) из искажений n, когда наблюдение начиналось на севере от столба. Составляем уравнение типа

$$s + n = d + \lambda,$$

при чем n и s одновременно в одном и том же уравнении не встречаются; благодаря этому задача получает полное разрешение. Имеем 181 уравнений ошибок (см. табл. 2).

Нормальные уравнения:

$$87s + 0n = +3''.78$$
$$0s + 94n = -4.94.$$

Решение:

$s = +0''.0434$ с обратным весом $Q = 0.014943$
$n = -0.0526$ » » » $= 0.010638$
$s - n = +0.0954$ » » » $= 0.025581$

$$[\lambda\lambda] = [dd] - [ad]s + [bd]n = 19.9403 - 0.1641 - 0.2594 = 19.5168.$$

Подстановка значений неизвестных в уравнения ошибок дает остаточные ошибки λ и снова $[\lambda\lambda] = 19.6315$. Отсюда:

$$\mu_{\Delta z} = \sqrt{\frac{19.5741}{181-2}} = \sqrt{0.109353} = \pm 0''.331.$$

$$\mu_s = \pm 0''.040 \qquad \mu_{s-n} = \pm 0''.053.$$
$$\mu_n = \pm 0.034$$

Таблица 2

Уравнения ошибок по наблюдениям 1908.6 — 1911.5 гг.

Дата	s	n	$d=H$ в 0.″01	$H-B$ в 0.″01	Дата	s	n	$d=H$ в 0.″01	$H-B$ в 0.″01
1908					1908				
VIII 7		1	+13	+18	X 31		1	+13	+18
9	1		— 1	— 5	XI 6	1		+44	+40
10		1	+51	+56	8		1	+19	+24
11	1		+20	+16	XII 11	1		+26	+22
12	1		+46	+42	14		1	+20	+25
21	1		+29	+25	28		1	+ 4	+ 9
25	1		+17	+13	1909				
27		1	—27	—22	I 3		1	+37	+42
28		1	—14	— 9	5	1		—19	—23
31		1	—28	—23	20	1		— 6	—10
IX 19		1	—13	— 8	II 10	1		—14	—18
23	1		+60	+56	11	1		+39	+35
24		1	—39	—34	13	1		+ 1	— 3
29		1	—55	—50	18		1	+63	+68
X 7		1	+11	+16	25	1		—13	—17
9	1		+10	+ 6	26		1	+ 7	+12
11	1		+20	+16	27		1	+44	+49
12	1		+55	+51	III 7	1		— 5	— 9
13		1	+23	+28	11		1	—14	— 9
15	1		— 1	— 5	12	1		—10	—14
18		1	—20	—15	30		1	— 2	+ 3
22		1	+ 7	+12	IV 5	1		— 1	— 5
24	1		+44	+40	8		1	+ 7	+12
25	1		+39	+35	10		1	—18	—13
27		1	— 4	+ 1	V 2		1	+41	+46

(Продолжение табл.. 2)

Дата	s	n	$d=H$ в 0.01	$H-B$ в 0.01	Дата	s	n	$d=H$ в 0.01	$H-B$ в 0.01
1909					1909				
V 3		1	— 3	+ 2	VIII 4	1		+39	+35
4	1		+29	+25	6		1	—21	—16
7		1	+ 9	+14	8	1		+45	+41
9	1		+24	+20	16		1	—26	—21
23	1		+30	+26	18	1		+14	+10
27	1		—30	—34	19		1	+39	+44
28		1	—39	—30	22	1		—47	—51
29		1	—58	—53	23		1	—24	—19
31	1		—25	—29	24		1	—34	—29
VI 15	1		—41	—45	25	1		—32	—36
16		1	—89	—84	27	1		— 3	— 7
17		1	0	+ 5	30	1		— 2	— 6
21	1		— 2	— 6	31	1		+18	+14
23	1		+37	+33	IX 1		1	+ 9	+14
24	1		+15	+11	2		1	+15	+20
25		1	—43	—38	3	1		—28	—32
26		1	—77	—72	9	1		+48	+44
27		1	+19	+24	13		1	+ 1	+ 6
28	1		— 1	— 5	14		1	—13	— 8
29		1	+23	+28	15		1	—62	—57
VII 2	1		—36	—40	16		1	+12	+17
3	1		+62	+58	17	1		+25	+21
8		1	— 5	0	18		1	+17	+22
9	1		+38	+34	19		1	+21	+26
19		1	+ 7	+12	22	1		+11	+ 7
22		1	—51	—46	23	1		+ 1	— 3

(Продолжение табл. 2)

Дата	s	n	$d=H$ в 0″.01	$H-B$ в 0″.01	Дата	s	n	$d=H$ в 0″.01	$H-B$ в 0″.01
1909					1910				
IX 27	1		+37	+33	IV 6	1		— 5	— 9
28		1	—42	—37	7		1	—63	—58
X 2	1		—19	—23	8	1		—10	—14
4	1		—36	—40	9		1	—24	—19
7		1	—13	— 8	11		1	+30	+35
8	1		— 7	—11	12	1		—40	—44
9		1	—20	—15	13		1	—43	—38
15	1		— 7	—11	17	1		—16	—20
24	1		— 1	— 5	26		1	—62	—57
30	1		— 8	—12	V 2		1	—75	—70
XI 17		1	—21	—16	4	1		+31	+27
18	1		—21	—25	5		1	+12	+17
XII 21	1		+26	+22	10	1		+23	+19
1910					11	1		—17	—21
I 6	1		—48	—52	16		1	+42	+47
25		1	—31	—26	17	1		—16	—20
II 15		1	+14	+19	23		1	—77	—72
III 5		1	+68	+73	24	1		—50	—54
10		1	+28	+33	VI 2	1		—53	—57
23		1	+25	+30	5		1	—42	—37
24		1	+10	+15	6	1		— 4	— 8
25		1	—48	—43	7	1		—19	—23
IV 2		1	—25	—20	8		1	—33	—28
3		1	+51	+56	9	1		—59	—63
4		1	— 1	+ 4	10	1		— 5	— 9
5	1		+11	+ 7	12		1	—64	—59

(Продолжение табл. 2)

Дата	s	n	$d=H$ в 0″.01	$H-B$ в 0″.01
1910				
VI 23		1	—47	—42
30	1		—19	—23
VII 1		1	+17	+22
2		1	—10	— 5
4	1		+11	+ 7
19	1		—38	—42
20	1		+ 7	+ 3
25		1	—17	—12
29		1	+42	+47
30		1	+12	+17
VIII 4		1	+17	(+22)
12	1		+18	+14
25		1	+69	+74
IX 3		1	+81	+86
4	1		+29	+25
21	1		—16	—20
23		1	+ 9	+14
X 3		1	+10	+15
4	1		+68	+64
1910				
X 7	1		+20	+16
31	1		—37	—41
XI 7		1	+12	+17
18	1		+41	+37
XII 3		1	—38	—33
1911				
I 17		1	+11	+16
23		1	+ 4	+ 9
27		1	+40	+45
II 19	1		—11	—15
21	1		+59	+55
			+24.26	+24.56
			—24.43	—24.16
		$[d^2]=$	19.9403	
		$[\lambda^2]=[(H-B)^2]=$		19.6315
		$n=$		181

§ 13. Значения поправок к зенитным расстояниям

Для искажений, внесенных конструкцией инструмента в наблюдения, начатые при трубе на юге от столба или на севере, у нас получилось:

1905.0—1906.7 г.	1908.6—1911.5 гг.
$s = +0''.068 \pm 0.040$	$s = +0''.043 \pm 0''.040$
$n = -0.006 \pm 0.037$	$n = -0.053 \pm 0.034$
$\mu_{\Delta\alpha} = \pm 0''.275$	$\mu_{\Delta\alpha} = \pm 0''.331$

В 1905.0 — 1906.7 г. значения s и n для двух положений инструмента далеко не одинаковы, — обстоятельство очень высокой важности, так как это систематическое искажение в наблюдениях С. К. Костинского и Ф. Ф. Витрама симметричным процессом наблюдений не выключалось, значит и вообще не оправдываются приведенные выше (§ 9) субъективные убежденности в этом В. Струве и М. Нюрена.

В 1908.6—1911.5 искажения зенитных расстояний были почти равны по величине, но противоположны по знаку и потому в симметричном процессе наблюдений исключались, но, конечно, не из каждого отдельного наблюдения.

Среднее из двух противоположных наблюдений получало искажение

в 1905.0—1906.7 г.	$\frac{s+n}{2} = +0''.031 \pm 0''.027$
» 1908.6—1911.5 гг.	$= -0.005 \pm 0.026.$

Искажение $+0''.031$ есть величина весьма заметная в сравнении с теми величинами, определению которых инструмент в первом вертикале служит.

Для разности искажений $s - n$ мы получили

1905.0—1906.7 гг.	$s - n = +0''.074 \pm 0''.051$
1908.6—1911.5	$= +0.095 \pm 0.053.$

Наше значение $s - n$ для 1905.0—1906.7 и по размерам и по знаку совершенно совпадает с выводом С. К. Костинского, но средняя ошибка может быть только такою, как получилось у нас, не $\pm 0''.020$, а $\pm 0''.051$.

Разность в $0''.021$ между $s - n$ для 1905.0—1906.7 г. и для 1908.6—1911.5 гг. покрывается их средними ошибками, однако есть основания полагать, что увеличение на $0''.021$ разности $s - n$ реально. Само собою разумеется что поправки должны сопровождаться знаками обратными искажениям.

§ 14. О разности $w - k$

На примечательном эпизоде наблюдений 1905.0—1906.7 г., на громадной разности

$$w - k = +0''.287 \pm 0''.063$$

в значениях зенитных расстояний, определенных наблюдателями Витрамом и Костинским, останавливаться здесь не приходится. В статье С. К. Костинского приведены пять гипотез для объяснения этого явления. Все эти гипотезы явления не объясняют, это находит и сам их автор. Реальная причина этого явления громадной разности $w - k$, мною найдена. Она не находится ни в каком отношении к рассматриваемому в этой статье явлению систематичностей n и s, и потому будет разъяснена при другом случае. Отметим только, что исследование С. К. Костинского 1907 г. для этой разности дало два значения (см. там же, стр. 77): $+0''.366 \pm 0''.037$ и $+0''.289 \pm 0''.050$. По методу вывода правильно только наше значение и наша оценка точности.

§ 15. Особенности остаточных ошибок в предыдущих выводах

Близость выводов к истине и правильность их проверяются прежде всего не средними их ошибками, которые здесь у нас велики, а увязкой, согласием выводов с другими и выводами и наблюдениями, к вопросу относящимися. Средней ошибкой и относительным весом выводов характеризуется обстановка измерительной работы, соразмерность ее частей, организация работы. Только при полном исключении или выявлении систематичностей характеризуются среднею ошибкою выводов пределы их точности; вне этого случая средние ошибки всегда преувеличены. Это именно возможно здесь и у нас. Ведь группировки знаков отчетливо заметны в обоих рядах остаточных ошибок и в 1905.0—1906.7 г. и в 1908.6—1911.5 гг. Исследуем, поэтому, получившиеся у нас остаточные ошибки.

1) Сосчитывание количества знаков положительных и отрицательных дает:

	1905.0—1906.7 г	1908.6—1911.5 гг.
	$[+] - [-] = 61 - 53 = 8$,	$= 92 - 88 = 4$,
должно быть	$= 0 \pm \sqrt{116} = 0 \pm 10.8$	$= 0 \pm \sqrt{181} = 0 \pm 13.5$

2) Сравнение количества последовательностей f знаков с количеством перемен w знаков дает:

	1905.0—1906.7 г.	1908.6—1911.5 гг.
	$f - w = 60 - 58 = 2$,	$= 108 - 72 = 36$,
должно быть	$= 0 \pm \sqrt{115} = 0 \pm 10.7$	$= 0 \pm \sqrt{180} = 0 \pm 13.4$.

3) Критерий Аббе дает:

	1905.0—1906.7 г.	1908.6—1911.5 гг.
$A = [\varepsilon^2]$	$= 8.5287$	$= 19.6315$
$B = [(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})^2]$	$= 16.9394$	$= 30.6034$
$\frac{2A}{B}$	$= \frac{17.0574}{16.9394} = 1.0034$	$= \frac{39.2630}{30.6034} = 1.2831,$
должно быть	$= 1 + \frac{1}{\sqrt{116}} = 1.0928$	$= 1 + \frac{1}{\sqrt{181}} = 1.0741.$

Итак, тремя примененными критериями присутствие скрытых систематичностей, свойственных всему ряду, в остатках λ разностей Δz для 1905.0—1906,7 г. не утверждается и отчетливо утверждается в остатках разностей Δz для 1908.6—1911.5 гг. Это различие вместе с явной и одинаковой в обоих рядах, по типу кратковременности, группировкой знаков требует дальнейшего изучения. Факт невычерпанных систематичностей несомненен и потому ясно, что в наших выводах средние ошибки преувеличены. Таков исходный материал исследования.

Понятно, что наше заключение об отсутствии систематичностей, проникающих весь ряд, в окончательных Δz года 1905.0—1906.7, не имеет никакого сходства с тем «параллелизмом хода ломанных линий», который искусственно достигнут в статье С. К. Костинского в результате «освобождения наблюдений зенит-телескопа от влияния ошибки отрицательного параллакса» (Mitteilungen, 1907, стр. 90). Наблюдения зенит-телескопа в 1905.0—1906.7 дали отрицательное значение для параллакса δ Кассиопеи. Пока причина не найдена, всякое исправление фактов, даваемых наблюдениями, недопустимо; а это именно и сделано в исследовании С. К. Костинского. Мы же никак не изменяем кривых колебаний, выявленных каждым из инструментов, никак их не касаемся, даже и разностей зенитных расстояний здесь никак не сгруппировываем, у нас каждая разность Δz рассматривается обособленно.

§ 16. Определение n и s из наблюдений только пассажного инструмента

Значения искажений n и s возможно выделить, пользуясь зенитными расстояниями и одного только пассажного инструмента в первом вертикале. Роль нашего второго инструмента должно сыграть в таком случае предварительное и наиболее полное выключение из зенитных расстояний влияния всех других воздействий. Пулковские Publications, III, 1870 г. и т. X, 1903 г. содержат для такого исследования обширные материалы, но мы в настоящем исследовании ограничимся только уста-

новлением факта возможности такого определения искажений n и s. Обращаемся прямо к наблюдениям В. Струве 1840—1842 гг., из которых он получил свое знаменитое значение аберрационного постоянного. Эти наблюдения и вывод из них опубликованы В. Струве в 1843 г. с остаточными ошибками для каждого наблюдения, но без выключения колебаний широты, которых присутствие тогда еще не было установлено.

Так как порядок наблюдений в общем был симметричный, то, не выключая и теперь колебаний широты из тех наблюдений, делаем предположение, как и прежде, что каждая остаточная ошибка сложилась 1) из случайной ошибки λ, 2) из искажения s и 3) из искажения n. Составляем из уклонений, опубликованных В. Струве, уравнения ошибок типа

$$s + n = l + \lambda.$$

Из уравнений ошибок мы получаем нормальные уравнения и потом решение задачи.

Из наблюдений β Кассиопеи 1841.4—1842.9 гг.

Нормальные уравнения:

$$21s + 0n = +0''.55$$
$$0s + 16n = -0.40$$

Решение:

$$s = +0''.026 \pm 0''.047 \qquad Q = 0.047619$$
$$n = -0.025 \pm 0.054 \qquad = 0.062500$$
$$s - n = +0.051 \pm 0.068 \qquad = 0.100119$$
$$[\lambda\lambda] = 1.6641 - 0.0144 - 0.0100 = 1.6397;$$
$$\mu^2 = 0.046849, \quad \mu = \pm 0''.216.$$

Из наблюдений δ Кассиопеи 1841.1—1842.9 гг.

Нормальные уравнения:

$$21s + 0n = +0.55$$
$$0n + 22n = -0.54$$

Решение:

$$s = +0''.036 \pm 0''.051 \qquad Q = 0.047619$$
$$n = -0.024 \pm 0.049 \qquad = 0.045555$$
$$s - n = +0.060 \pm 0.065 \qquad = 0.093274$$
$$[\lambda\lambda] = 2.2510 - 0.0268 - 0.0132 = 2.2110;$$
$$\mu^2 = 0.053927, \quad \mu = \pm 0''.232.$$

Малое количество наблюдений, 37 и 43, у В. Струве для каждой звезды отнимает у получившихся выводов некоторую долю определенности. Тем не менее согласие значений s и n и $s-n$ в 1841—1842 гг. и в 1908—1911 гг. примечательно.

Для всех же значений в целом получается:

$s-n=+0''.007$ в 1840.3—1842.9 гг. из 298 наблюдений В. Струве.
$=+0.012$ » 1908.6—1911.5 » 1481 » А. Васильева.

Все это указывает на существование, при наличии некоторых условий, искажения, определяемого конструкцией инструмента, и на необходимость дальнейшей разработки этого факта в целях сведения искажений s и n к нулю, независимо от того, будет ли процесс наблюдений или не будет симметричным.

§ 17. Причина и следствие неравных n и s

Единственными причинами создавшими неравенство искажений n и s в наблюдениях 1905.0—1906.7 гг. и, вероятно, в более ранних было несимметричное состояние горизонтальной оси и несовершенная выверка инструмента. Этот высокой важности факт установился, повидимому, с первых наблюдений М. Нюрена (1869.9—1871.8); подробности мною представлены в исследовании «Условия надежного нивеллирования горизонтальной оси в пассажных инструментах», 1928 г. §§ 3, 4 и сл.

В статье С. К. Костинского, из которой для нашего исследования мы взяли разности Δz зенитных расстояний 1905.0—1906.7 гг., в наблюденные зенитные расстояния z автором ее

введены поправки $s'=-0''.037$ и $n'=+0''.037$,
следовало же ввести $s=-0.068$ » $n=+0.006$

$s'-s=+0.031$ $n'-n=+0.031$

и потому там в статье зенитные расстояния искажены на $+0''.031$.

В конце 1907 г. несимметричное состояние горизонтальной оси и наклонение к северу всего инструмента были мною замечены, обстоятельно обследованы и с 12 апреля 1908 г. постепенно исправлены. Подробности в вышеназванном исследовании. Следствием исправления было то, что в 1908.6—1911.5 гг. мы имеем n и s абсолютно почти равными, но $n-s=+0''.095$ сравнительно большим, вероятно, потому, что я излишне облегчил цапфы, каждый до 7 кг (18 Ф.) при наложенном уже уровне.

§ 18. Причина систематичностей n и s

Горизонтальная ось с трубой на одном конце и с уравновешивающим трубу грузом на другом конце, с противогрузом прогибу внутри оси — все весом 410 кг (25 пуд.) — поддерживается на четырех цилиндрических образующих оси в восьми точках опоры, распределенных попарно. Две образующие принадлежат цапфам и опираются на ложа цапф; ложа утверждены на выступах гранитного столба. Две других образующих расположены от цапф ближе к средине оси и опираются на два изогнутых рычага в аппарате для перекладки, имеющем вертикальную ось и крестовины; крестовины держат опорные точки рычагов. На другом конце рычагов гири, так что горизонтальная ось почти всем своим весом покоится на рычагах, а цапфы давят на свои ложа весом уменьшенным до желаемой степени, в 5—10—15 кг. Когда же горизонтальная ось над цапфами поднята, весь ее вес с трубой и грузами давит только на рычаги и через их точки опоры на вертикальную ось аппарата перекладки.

Рычаги подпирают горизонтальную ось на 44-м сантиметре от ее средины, а гнезда цапфов — на 60-м сантиметре от средины; ось же трубы и центр наружного противовеса трубы приходятся приблизительно на 74-м сантиметре от средины горизонтальной оси. При перекладке трубы с юга от гранитного столба на север или с севера на юг горизонтальная ось над гнездами цапфов поднимается, опираясь только на ложа вышеупомянутых рычагов, поворачивается на 180° концами своими и опускается снова цапфами в их гнезда.

Таким образом при перекладке больше 30 см с каждого края горизонтальной оси с трубой на ее конце и наружным противовесом на другом остаются, хотя и короткое время, но без опоры. Естественно в таком случае заподозрить некоторый выгиб горизонтальной оси с отходом объективного конца трубы чуть-чуть наружу, т. е. боковое гнутие, увеличивающее коллимацию.

Прослеживая, как такое явление отразилось бы на результатах наблюдений, мы действительно получаем полное объяснение возникновению систематичностей n и s, но в наблюдениях только с одной перекладкой между восточным и западным прохождениями звезды. В случае указанной перемены коллимации мы имели бы для часового угла t и для $\sec t$ в наблюдениях, начатых на юге, увеличение, а в начатых на севере от столба уменьшение.

Прослеживая гипотезу такой уже одинаковой при всех перекладках перемены коллимации в наблюдениях зенитных расстояний по способу

В. Струве, с перекладками на востоке и на западе, мы искажения n и s также получаем, но со знаками как раз обратными тому, что с такой определенностью получилось у нас реально из наблюдений. Чтобы знаки n и s гипотетические привести в совпадение с действительностью, оказывается необходимым предположить еще, что для исчезновения перемены коллимации, вызванной перекладкою, необходимо время бо́льшее, чем промежуток времени между прохождениями звезды на востоке или на западе первого вертикала. Не успевающая исчезнуть перемена коллимации и создает систематичности n и s с теми знаками, как дают наблюдения.

Когда инструмент работает непрерывно в нескольких наблюдениях сразу, когда перекладки следуют одна за другой без больших промежутков времени, то труба остается смещенной все время, коллимация остается все время одинаковой, методом наблюдений выключается полностью и систематичности n и s исчезают или уменьшены. От этого для всех наблюдений в целом мы и получили

$$s - n = +0''.007 \text{ у В. Струве} \quad \text{из 298 наблюдений}$$
$$= +0.012 \text{ у А. Васильева} \quad » \ 1481 \quad »$$

В наблюдениях 1905.0—1906.7 инструмент стоял криво, оттого n и s получились неравными и по абсолютной величине.

§ 19. Линейный размер искажений n и s

Принявши гипотезу выгиба средины горизонтальной оси, интересно представить отчетливо, с какими величинами смещений мы здесь имеем дело. Перечислим величины n и s в линейную меру в виде, хотя бы равнозначного неравенства цапфов, которое в вертикально направленной трубе влияет так же как коллимация. В моих, например, наблюдениях звезды δ Кассиопеи получились искажения $n = -0''.043$ и $s = +0''.053$. Так как расстояние между цапфами 120 см, то величины $-0''.043$ и $+0''.053$ соответствовали бы утолщению или приподнятию того или другого цапфа всего только на 0.26 μ и на 0.34 μ, — это всего только половина длины световой волны, меньше толщины слоя масла покрывающего цапфы. Прав Амбронн, сказавший в своем трактате об инструментах, что существующая система Пулковского пассажного инструмента в первом вертикале есть система идеальная, которую придумал Репсольд.

§ 20. Причина средних ошибок выводов

Если величины n и s в сущности так малы, то откуда возникают большие сравнительно средние ошибки, их сопровождающие? откуда берет начало большая средняя ошибка отдельного уравнения в наших решениях задачи? — Каждая из остаточных ошибок в наших уравнениях $\pm 0''.28$, относящихся к наблюдениям 1905.0—1906.7 и $\pm 0''.33$, относящихся к наблюдениям 1908.6—1911.5, возникла из сложения ошибок при измерении зенитного расстояния δ Кассиопеи на пассажном инструменте и при одновременном измерении того же зенитного расстояния на зенит-телескопе. Какой из инструментов создает такую среднюю ошибку или ее создают в сумме оба? Если допустить, что источники ошибок внешние или внутренние, инструментальные или не связанные с инструментами, для каждого из них одинаковы, то можно получить значение средней ошибки каждого отдельного наблюдения на пассажном инструменте и на зенит-телескопе. Эти значения для обоих инструментов будут, конечно, равными.

Имеем среднюю ошибку одного зенитного расстояния из наблюдений 1905.0—1906.7 гг.:

$$\mu_{пи} = \mu_{зт} = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \frac{\pm 0''.275}{1.41} = \pm 0''.195;$$

из наблюдений 1908.6—1911.5 гг.;

$$\mu_{пи} = \mu_{зт} = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \frac{\pm 0''.331}{1.41} = \pm 0''.234.$$

Соответствуют ли действительности эти значения равных средних ошибок? — Да, факты это подтверждают. Мои предшественники по пассажному инструменту получили приблизительно такую же среднюю ошибку одного зенитного расстояния. Мною в 1916 и в 1917 г. опубликована была, как побочный вывод из 1481 моих наблюдений средняя ошибка одного зенитного расстояния $\pm 0''.193$, получившаяся при выработке системы склонений наблюденных звезд. В § 16 этой статьи получилось из наблюдений В. Струве 1840—1842 гг. $\pm 0''.22$ и $\pm 0''.23$.

Так на пассажном инструменте в первом вертикале. А на зенит-телескопе? Наблюдатели на зенит-телескопе опубликовали для звезды δ Кассиопеи и для других зенитных звезд такие значения средней ошибки одного зенитного расстояния:

δ Кассиопеи	$\pm 0''.18$	в 1904 —1906 г.	И. В. Бонсдорф
»	± 0.21	» 1908.2—1911.4	Л. И. Семенов
Helsingf. 1125	± 0.22	» 1909.7—1911.1	»
» 1226	± 0.22	» 1909.6—1911.1	»
» 1260	± 0.24	» 1908.6—1911.1	»

Такое согласие вполне независимых определений не только укрепляет надежность наших сделанных в этом исследовании выводов, но указывает еще и на то, что причина, определившая размеры средней ошибки, одинаковые и в 1905.0—1906.7 гг., и в 1908.6—1911.5 гг., и в 1840—1842 гг., может быть одна и та же.

Заключение

В настоящей работе мы выявили размеры одного из искажений, возникающих в инструменте при перекладке его горизонтальной оси концами. Размеры искажения оказались чрезвычайно малыми, они невольно возбуждают изумление перед искусством механика, инструмент строившего.

Несмотря на 100 почти лет существования инструмента и его работы такое искажение всегда предполагалось, постоянно делались попытки его определения, но в сущности безуспешные вследствие трудностей определения очень малых величин. Вместо подлинного определения утверждали гипотезу о полном исключении искажения в результате двух симметрично выполненных наблюдений.

Наше исследование на примере наблюдений 1905.0—1906.7 гг. общность этой гипотезы опровергает и кроме того сообщает определенный вес каждому отдельному наблюдению. Есть основания надеяться, что новые наши наблюдения, непрерывно с 1918 г. до настоящего времени выполняемые и в обработке близящиеся к окончанию, дадут возможность выделить с полной отчетливостью и воздействия атмосферные, которыми зенитные расстояния искажаются. В 1917 г. мы опубликовали наши в этом отношении выводы из наших наблюдений 1908—1911 гг.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О КИСЛОТАХ КАВКАЗСКОЙ НЕФТИ

А. Е. ЧИЧИБАБИНА, Ф. В. ЧИРИКОВА, М. М. КАЦНЕЛЬСОНА, С. И. КОРЯГИНА и Г. В. ЧЕЛИНЦЕВА

Работа над кислотами кавказской нефти была начата в лаборатории органической химии Московского Высшего технического училища еще в 1911 г. и, прекратившись в начале Европейской войны, была затем возобновлена лишь в 1929 г.

Привлекала нас к этой работе прежде всего значительная реактивность кислот, в сравнении с углеводородами, и надежда проникнуть этим путем в тайны строения колоссального природного источника циклических соединений, представляемого кавказским и некоторыми другими месторождениями нефти, остающихся в главной массе неисследованными, но, кроме того, также и надежда найти в самих нефтяных кислотах, добываемых в технике в огромных количествах, быть может уже в близком будущем, новый источник для технического синтеза органических веществ.

О начальных успехах этой работы было сделано два доклада в 1913 г.: 1) краткий на Съезде русских естествоиспытателей и врачей в Тифлисе и 2) подробный в Московском обществе содействия развитию опытных наук и их практических применений. 4 IV 1929 был сделан краткий доклад в Академии Наук СССР, резюмирующий наши достижения до 1929 г. Но в печати имеются лишь краткие рефераты в «Дневнике» Тифлисского съезда и в Докладах Академии Наук СССР.

Исследование строения нефтяных кислот представляет, по сложности и трудности, одну из задач такого рода, при разрешении которых даже очень большую работу можно считать только началом. И это было причиной, почему мы долго откладывали опубликование добытого нами большого экспериментального материала. Но в последнее время мы начали обрабатывать этот материал, так как экспериментальная работа задержалась снова вследствие необходимости подготовить большое количество нового исходного

материала, а в настоящий момент нас заставляет поспешить с опубликованием этого материала появление доклада о нефтяных кислотах, сделанного проф. Брауном[1] (Франкфурт на/М.) на съезде немецких натуралистов в Вене, произведшим громадную работу, которую он, однако же, также считает лишь началом исследования нефтяных кислот.

Брауном были исследованы кислоты нефтей: германской, румынской, галицийской, калифорнийской и техасской, и пока не были исследованы кислоты русской и в частности бакинской нефти. Но, как видно из реферата его доклада, повидимому, все эти нефти дают нефтяные кислоты довольно близкого состава, и именно, даже в американских нефтях им были найдены преимущественно насыщенные циклические кислоты ряда $C_nH_{2n-2}O_2$, названные Марковниковым нафтеновыми кислотами, а для высших фракций Брауном обнаружено присутствие большого количества бициклических кислот ряда $C_nH_{2n-4}O_2$.

Что касается методов исследования, то поскольку можно судить по краткому реферату работ Брауна, мы пользовались одинаковыми с ним методами лишь в частях, разработанных прежними исследователями, особенно — Марковниковым и Асканом, и — различными методами в тех частях работы, которые дали наиболее интересные результаты.

Укажу вкратце, что у Брауна особенно важные результаты дали следующие методы:

1) Реакция Курциуса в великолепной модификации К. Ф. Шмидта, т. е. переход кислот в амины с меньшим числом атомов углерода через гидразиды, приводящий к замене карбоксила на аминогруппу:

$$C_nH_{2n-1}—CO_2H + HN_3 \rightarrow C_nH_{2n-1}—C\begin{matrix}OH\\OH\\N<\end{matrix} + N_2 =$$

$$= C_nH_{2n-1}N = C = O \rightarrow C_nH_{2n-1}—NH_2;$$

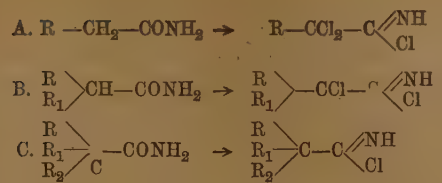
последующее превращение аминов в этиленовые углеводороды методом исчерпывающего метилирования:

$$C_nH_{2n-1}—NH_2 \rightarrow C_nH_{2n-2}$$

и исследование продуктов окисления этих углеводородов.

2) Применение открытой Брауном реакции замещения на хлор водородов в α-положении к карбоксилу при действии пятихлористого фосфора на амиды кислот, при чем первыми продуктами являются, как известно, имидхлориды:

[1] Ztschr. f. angew. Chemie 44,661 (1931).



3) Как Брауном, так и нами, применялся метод бромирования кислот:

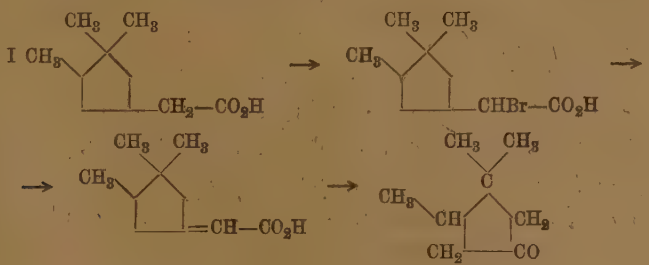
$$C_nH_{2n-1}—COOH \rightarrow C_nH_{2n-2}Br—COOH.$$

Дальнейшее превращение у Брауна состояло в отнятии бромистого водорода и получении ненасыщенных кислот:

$$C_nH_{2n-2}Br\ COOH - HBr = C_nH_{2n-3}—COOH$$

с последующим окислением их по месту двойной связи, или в случаях длинной цепи, содержащей карбоксил, удаленный от ядра, — в превращении их в лактоны и в окислении последних:

Этим путем Браун установил строение одной из изомерных нафтеновых кислот $C_{10}H_{18}O_2$, как имеющей структурную формулу I, превращения которой видны из нижеследующих формул:



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Нами было переработано 416 кг технических бакинских нефтяных кислот, доставленных нам фирмой Теракопова. Более точного определения месторождения мы не могли получить. Эти кислоты представляли довольно густую темную жидкость чрезвычайно неприятного запаха. Как показали опыты определения экстракцией петролейным эфиром высушенных натриевых солей кислот, сырые кислоты содержали около 12% нейтральных продуктов, повидимому, главным образом углеводородов.

Ввиду того, что мы предполагали сосредоточить внимание на низших фракциях кислот, а отчасти потому, что мы тогда не располагали большими аппаратами для перегонки в вакууме, первая операция, произведенная нами, была отгонка низкокипящих фракций при обыкновенном давлении в медном перегонном аппарате, вмещавшем около 30 кг кислот, с колонкой или дефлегматором Тихвинского для фракционирования высококипящих продуктов (с обогревающей муфтой), высотой в 50 см. Отгонялись продукты до 290°, так как выше этой температуры уже замечалось разложение. Фракции брались в пределах 10°.

Получены следующие фракции:

Фракции	Количество в г	Колич. нейтр. продуктов в г
1. до 200°	22 507	16 100 (71½%)
2. 200—210	5 803	
3. 210—220	5 509	13 660 (69%)
4. 220—230	8 491	
5. 230—240	12 025	3 920
6. 240—250	18 393	6 050
7. 250—260	33 312	6 470
8. 260—270	49 289	4 945
9. 270—280	88 421	8 975
10. 280—290	38 868	6 780
Итого	282 598	69 105 (24.2%)

Низшие фракции состояли главным образом из углеводородов, начавших кипеть уже при 80°.

Все фракции растворялись в избытке едкого натра, и нейтральные продукты отгонялись пропусканием перегретого пара в небольшом техническом аппарате. Фракции 2, 3 и 4 соединялись вместе. Особенно большое количество нейтральных продуктов содержалось в низших фракциях (около 70%), а общее количество их вдвое выше, чем в сырых кислотах, (24.2%). Пробы углеводородов из различных фракций кипели в пределах температур, соответствующих фракциям, кроме, быть может фракции 280—290°, что доказывает, что углеводороды не образовались от разложения кислот при перегонке, а содержались в самих нефтяных кислотах.

Растворы натриевых солей, остающиеся после отгонки углеводородов, разлагались 20%-ным избытком серной кислоты при очень продолжительном перемешивании. После этого отделенные кислоты сушились безводной сернонатриевой солью или непосредственно или после растворения в легком петролейном эфире. Сушить хлористым кальцием нельзя, так как нефтяные кислоты с ним реагируют с образованием кальциевых солей и выделением

хлористого водорода; высушенные кислоты содержат много золы, и при перегонке разлагаются.

Выделенные кислоты фракционировались, кроме фракции 280—290°, при чем собирались вместе фракции, имеющие одинаковые пределы температур кипения. Получены следующие фракции очищенных кислот:

Acides purifiés

1.	до 200°— 800 г	5.	250—260° 22 270 г
2.	200—230 —5260	6.	260—270 33 875
3.	230—240 —4200	7.	270—280 64 285
4.	240—250 —6060	8.	выше 280 (остатки в колбах) 20 630
	Итого. . . 137 380 г		

Таким образом, за вычетом фракции 280—290° получается все же довольно значительная потеря (около 40 кг) на операциях отделения кислот от водных жидкостей, а также — сушки (несколько килограмм погибло вследствие попытки сушить хлористым кальцием).

Получение метиловых эфиров

Для получения метиловых эфиров мы пользовались рецептом Аскана: На 1 объем кислот брались $1^1/_2$ объема метилового спирта и $^1/_2$ объема крепкой серной кислоты. Все смешивалось при взбалтывании, причем смесь сильно разогревалась. Затем она время от времени взбалтывалась. Когда смесь совершенно остывала, она выливалась в воду со льдом. Выделившийся слой эфиров после отстаивания отделялся, промывался взбалтыванием с холодным раствором едкого натра и три раза водой, после чего сушился хлористым кальцием. Выход сырых эфиров около 70% теоретического. Этерифицировались следующие фракции:

Фракция	Получено метиловых эфиров в г.
до 200	600
200—230	4320
230—240	3250
240—250	4940
Итого	13 110

После того метиловые эфиры подвергались 8-кратной тщательной фракционировке с дефлегматором Тихвинского, с колонкой высотой в 50 см, наполненной обрезками алюминиевой проволоки. Низшие фракции (до 189°) были разогнаны еще 4 раза с пятишариковым дефлегматором Тихвинского.

В результате получились фракции, изображенные на таблице. Из них были проанализированы фракции, кипящие до 189° и кроме того, фракция 202—204°. Анализы представляют результаты, средние из двух определений, а в случаях отступления от правильности в нарастании процентного содержания углерода — из трех и четырех определений (помечены *). Для этих фракций были определены удельные веса и коэффициенты рефракции. Удельные веса для тех фракций, которых было не менее 50 г, производились с большим пикнометром, емкостью около 50 см³, а для маленьких фракций — с малым пикнометром, объема около 1.5 см³.

Таблица свойств и анализов фракций метиловых эфиров

Темп. кип.	Q	d_0^0	d_{18}^{18}	%C	%H	n_D при t°
до 137°	8 г	0.89891	0.88418	65.83	10.90	—
137—146	12	0.90184	0.88537	65.54	10.94	1.41158 15°
*146—151	15	0.90370	0.88790	66.71	10.88	1.40911 16
**151—155	11	0.90594	0.89033	66.22	11.17	1.41089 16
155—158	25	0.90831	0.89233	66.52	10.98	1.41267 16
158—162	129	0.90932	0.89425	66.92	10.95	1.41795 15
162—164	85	0.91329	0.89837	68.34	10.93	1.41945 15
164—167	88	0.91918	0.90439	67.70	10.92	1.42165 15
167—170	68	0.92633	0.91139	68.66	11.03	1.42525 15
*170—173	50	0.93215	0.91668	68.57	11.38	1.42795 15
*173—177	106	0.93410	0.91934	68.78	10.91	1.42955 15
**177—181	158	0.93455	0.92000	68.33	11.00	1.43115 15
181—184	296	0.9357	0.92040	68.87	10.63	1.42715 23
184—186	361	—	0.92140	69.13	10.76	1.42805 23
186—189	425	—	0.92430	68.72	10.43	1.42955 23
198—201	520	—	—	—	—	—
201—204	520	—	—	71.05	11.01	—
204—206	485	—	—	—	—	—
206—209	595	—	—	—	—	—
209—212	463	—	—	—	—	—
212—215	440	—	—	—	—	—
212—220	390	—	—	—	—	—

Сравнение физических свойств наших эфиров со свойствами эфиров, исследованных Марковниковым и Асканом показывает, что исследованные нами эфиры имеют более низкие удельные веса, чем эфиры, исследованные этими авторами (эфиры Аскана имеют удельные веса низшие, чем эфиры Марковникова).

Кроме того, все анализированные фракции были исследованы нами на оптическое вращение, при чем оказалось, что фракция 167—170° вращает плоскость поляризации влево. Вращение было найдено при толщине слоя 100 мм — 0.52, а при толщине 200 мм — 1.01. Такое же вращение 0.53, имели полученные омылением этого эфира кислоты, кипевшие при 219—223° после двукратной перегонки. Таким образом, несомненно, что вращение принадлежит самим эфирам и кислотам, а не каким-либо примесям к ним. Из остальных фракций, повидимому очень слабое правое вращение имела фракция 186—189°, но пока мы не можем считать это вполне доказанным.

Состав и свойства метиловых эфиров жирных и циклич. кислот

		% C	% H	t° кип. эфиров	t° кип. кислот
C_6	$C_5H_9CO_2CH_3$	65.62	9.40	158.5	216
	$C_5H_{11}—CO_2CH_3$	64.61	10.77	132—155	185—205
C_7	$C_6H_{11}—CO_2CH_3$	67.61	9.86	гексан. 179.5—181.5 пентан. 159.5—169	236 219.5—230
	$C_6H_{13}—CO_2CH_3$	66.67	11.11	148—172	209—224
C_8	$C_7H_{13}—CO_2CH_3$	69.23	10.25	гексан. 190—197 пентан. (?) —191	234—247 226—240
	$C_7H_{15}—CO_2CH_3$	68.35	11.39	168—191	215—237
C_9	$C_8H_{15}—CO_2CH_3$	70.59	10.59	—	—
	$C_8H_{17}—CO_2CH_3$	69.77	11.63	—	—
C_{10}	$C_9H_{17}—CO_2CH_3$	71.74	10,81	—	—
	$C_9H_{19}—CO_2CH_3$	70.97	11.83	—	—

При просмотре литературы, относящейся к кислотам кавказской нефти, нас поразило то, что до нас никто не обратил должного внимания на полное несоответствие физических свойств низших «нафтеновых» кислот свойствам кислот с пятичленными и шестичленными циклами, давно уже достаточно изученными, так что это несоответствие могло броситься в глаза.

Так, три низших кислоты у Марковникова и Аскана имели следующие свойства:

	t° кип.	Уд. вес	t° кип. метил. эфира
	Гептанафтеновая кислота $C_7H_{12}O_2$		
М.	215—216 (746 мм)	$d^{18,5}$—0.9567 d°—0.9712	164—166 (750 мм)
А.	215—217 (испр.)	$d^{18,4}$—0.95025	165.5—169.5 (испр.)
	Октонафтеновая кислота $C_8H_{14}O_2$		
М.	237—238 (испр.)	$d^{18,5}$—0.98805 d°—1.002	189—190 (испр.)
А.	237—239 »	d^{20}—0.9830 d°—0.9982	190—192 »
	Нононафтеновая кислота $C_9H_{16}O_2$		
М.	251—253	d^{20}_{20}—0.9756 d°—0.9902	205—206 (испр.)
А.	251—253	d^{20}_{20}—0.9795 d°—0.9893	211—213 »

Удельные веса кислот: 1) предельных, 2) циклических с пентаметиленовым циклом и 3) циклических с гексаметиленовым циклом:

		t° кипения
C_5H_9COOH	d^{15}—1.0452 (циклопентан-карбоновая кислота)	216
$C_5H_{11}COOH$	d^{18}—0.9096—0.9192 d°—0.9279—0.9453	185—205
$C_6H_{11}COOH$ (C_6) . . .	d^{15}_4—1.0344 d^{22}_4—1.0480	235
(Цикл. C_5) . . .	d^{20}_4—1.0072—1.0196 d°—1.0118—1.0214	219.5—230
$C_6H_{13}COOH$	d^{18}—0.9138—0.9256 d°—0.9279—0.9413	209—224
$C_7H_{13}COOH$ (C_6) . . .	d^{20}_4—0.9984—1.0090 d°—1.0182	234—247
(C_5) . . .	d^{18}—1.0065 d°—1.0181	226—240
$C_7H_{15}COOH$	d^{18}—0.9100—0.9111 d°—0.9210—0.9270	215—237

Ввиду этого нами было сделано несколько опытов определения удельных весов и коэффициентов преломления для смесей жирных и циклических кислот. Эти опыты показали, что удельные веса и коэффициенты преломления смесей кислот являются величинами аддитивными и следовательно могут быть вычислены по правилу смешения, т. е. по формуле

$$x = \frac{px'}{100} + \frac{(100-p)\,x''}{100},$$

где x — удельный вес или показатель преломления для смеси, x' и x'' — те же величины для компонент смеси, а p и $(100 - p)$ есть процентные содержания обеих компонент.

1) Смесь равных количеств циклогексанкарбоновой кислоты и норм. гептиловой кислоты дала d^{18}—0.9767 и n_D^{20}—1.4407.

Для циклогексанкарбоновой кислоты (по литературным данным): d^{18}—1.0415 n_D^{20}—1.4655.

Для нормальной гептиловой кислоты: d^{18}—0.9173 n_D^{20}—1.4192.

Средние вычисленные величины: d_{18}—0.9794, n_D^{20}—1.4427.

2) Для смеси равных количеств циклопентилуксусной и изоамилуксусной кислот найдено: d^{18}—0.9697 n_D^{18}—1.4380.

Для циклопентилуксусной кислоты d^{18}—1.0219 n_D^{18}—1.4537.

Для изоамилуксусной кислоты d^{18}—0.9168 — n_D^{18}—1.4239.

Средние вычисленные величины d^{18}—0.9694 — n_D^{18}—1.4383.

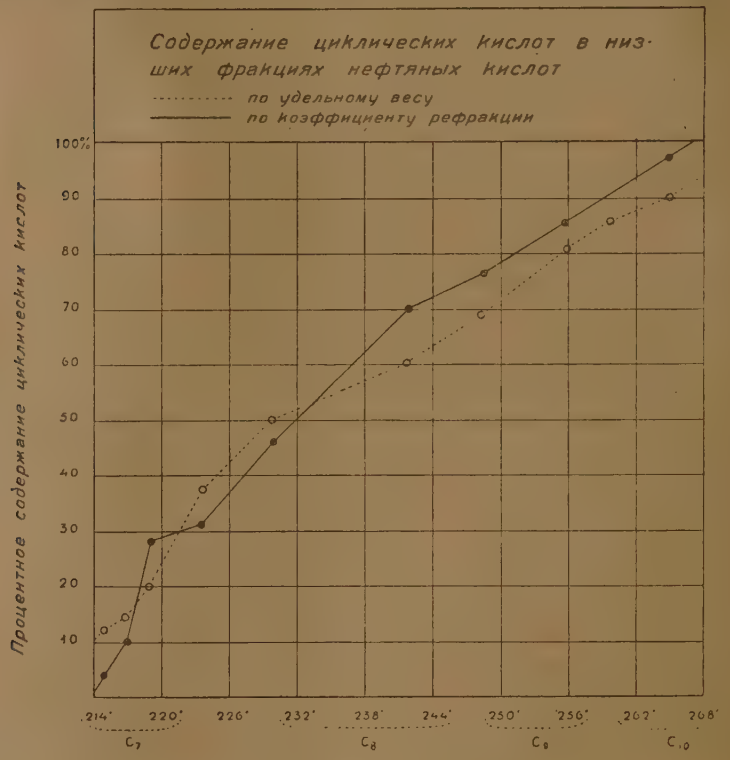
Нами был сделан расчет процентного состава низших фракций наших кислот по их удельным весам и коэффициентам преломления, при чем в основу вычислений для каждой фракции кислот взяты средние удельные веса и коэффициенты рефракции жирных и циклических кислот с числом атомов углерода в молекуле отвечающим содержанию серебра в серебряных солях кислот из соответствующих фракций (см. фиг. 1). Результаты этого вычисления видны из диаграммы. Конечно, эти вычисления дают лишь приблизительные результаты, так как удельные веса и коэффициенты рефракции изомерных кислот несколько отличаются между собой. Кроме того эти величины несколько различны для кислот циклогексанового и циклопентанового рядов (см. напр. выше таблицу удельных весов). Однако эти разницы не настолько велики, чтобы вычисленные результаты могли слишком сильно отличаться от истинных.

Некоторой гарантией правильности полученных результатов является достаточное совпадение вычислений по удельным весам и по рефракции. Согласно этим результатам, кислоты кипящие ниже 214° состоят исключительно из жирных кислот, затем количество циклических кислот постепенно увеличивается и фракции, кипящие выше 250°, состоят уже почти исключительно из циклических кислот. Количество жирных кислот должно быть больше в случае присутствия бициклических кислот.

Соответственно более высоким удельным весам кислот Марковникова и Аскана, содержание циклических кислот в соответственных фракциях у них было больше, но все же можно утверждать, что гептанафтеновая кислота Марковникова содержала около 60%, а у Аскана около 65%

предельных кислот, октонафтеновая кислота Марковникова — более 20%, а у Аскана около 30% жирных кислот (см. стр. 209).

Вышеизложенные данные привели нас к заключению, что уже низшие фракции нефтяных кислот представляют сложные смеси и что для успеха их исследования необходима еще новая большая работа по выработке методов разделения и идентификации кислот. С этой целью нами была про-



Фиг. 1.

изведена большая и трудная подготовительная работа, которая лишь медленно начала давать положительные результаты.

В работах прежних авторов можно было найти указания на получение из нафтеновых кислот кристаллических соединений, которые, казалось бы, могли быть использованы для установления тождества этих кислот с синтетическими кислотами известного строения. А именно, исследователями были описаны некоторые кристаллические соли, а из производных — ряд амидов с довольно резкой точкой плавления. Получение таковых мы решили испы-

тать прежде всего на низко кипящих фракциях, содержащих исключительно жирные кислоты. С этой целью первые три фракции эфиров, кипящие ниже 151, были омылены, и полученные кислоты два раза расфракционированы, при чем части кислот из различных трех фракций, кипящие в одинаковых пределах температуры, собирались вместе. Таким образом были получены следующие фракции кислот: (1) до 209°, (2) 209—215° (главная) и (3) 215—220°. Содержание серебра в серебряных солях из фракций (2) и (3) соответствует составу солей кислот $C_7H_{14}O_2$.

Найдено % Ag для фракции (2) 45.71 и для (3) 45.29.
Вычислено для $C_6H_{13}COOAg$ 45.57.

Фракция 209—215° была превращена в хлорангидриды, а затем, действием на последние аммиака — в амиды. Эти амиды были подвергнуты дробным перекристаллизациям из бензола, уксусного эфира и лигроина, сначала — горячих, а затем — испарением маточных растворов. Полученные фракции амидов перекристаллизовывались до получения постоянной температуры плавления при внешнем виде, не показывавшем явной неоднородности. Первые порции кристаллизации обыкновенно представляли плоские иглы, которые после кристаллизации из указанных растворителей на вид казались однородными и плавились резко при 104°. Такого продукта получено 1.4 г. Содержание азота в нем соответствует составу $C_6H_{13}CONH_2$ (получ. % N — 10.99; теор. колич. — 10.86). Кроме того, при кристаллизации маточных бензольных растворов выделялись в смеси с иглами более зернистые кристаллы, которые после двукратной кристаллизации из бензола плавились при 127.5—128° (около 0.3 г) и содержали 11.02% N.

В целях установления тождества этих амидов были приготовлены амиды 11 изомерных кислот $C_7H_{14}O_2$ из числа 17 возможных изомеров (в настоящее время известно 14 изомерных амидов этого состава). Из числа этих амидов одинаковую температуру плавления с выделенными амидами, в простых и смешанных пробах, давали: для первого амида — амид изоамилуксусной кислоты $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\!\!>\!CH—CH_2—CH_2—CH_2—CO—NH_2$, а для второго — амид ββ — диэтилпропионовой кислоты $(C_2H_5)_2\ CH—CH_2—CO—NH_2$. Для проверки были произведены определения температур плавления смешанных проб означенных амидов с амидами остальных 10 изомерных кислот. При этом оказалось, что амид диэтилпропионовой кислоты с другими амидами дает заметную депрессию, тогда как амид — изоамилуксусной кислоты с некоторыми амидами с близкой температурой плавления не дает заметной депрессии (температура плавления — промежуточная). Ввиду этого нефтяной амид был

омылен в кислоту, и из нее через хлорангидрид был приготовлен действием последнего на пара-нитранилин *p*-нитроанилид. Этот последний был приготовлен также из синтетической изоамилуксусной кислоты. Препараты пара-нитранилида, приготовленные из обоих образцов, представляли четырехугольные таблицы, плавившиеся в простых и смешанных пробах при 99—100°. Большая часть амидов не могла быть разделена кристаллизацией. Ввиду доказанной способности амидов давать смешанные кристаллы, этот метод разделения был оставлен.

Опыты разделения кислот при помощи солей тяжелых металлов

После просмотра литературы, касающейся солей тяжелых металлов кефтяных кислот, мы остановились на солях меди в виду способности медных солей нефтяных кислот растворяться в органических растворителях, чему придавал особенное значение Харичков, и на солях цинка и кадмия, из которых некоторые, согласно описаниям, несомненно были получены в кристаллическом виде.

Медные соли. Для изучения свойств солей были приготовлены, кроме вышеупомянутых 11 жирных кислот C_7, также еще несколько высших и низших жирных кислот C_6 и C_8, а также 10 кислот с циклами из пяти и из шести атомов углерода. Опыты с медными солями отдельных кислот давали надежду на возможность разделения кислот этим путем, так как оказалось, что по растворимости медных солей в петролейном эфире исследованные кислоты могут быть разделены на три группы:

1) Нерастворимые, главным образом вторичные циклические кислоты.

2) Растворимые — главным образом, изомерные жирные кислоты и третичные циклические.

3) Растворимые в присутствии свободной кислоты — нормальные жирные кислоты и циклические кислоты с удаленным от ядра карбоксилом.

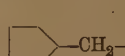
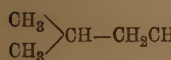
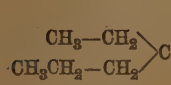
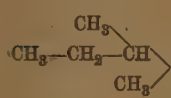
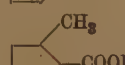
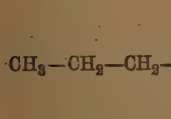
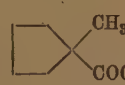
Однако опыты разделения исскуственных смесей кислот показали совершенную невозможность достигнуть разделения этим путем, так как в присутствии медных солей растворимых в петролейном эфире, в нем растворяются и соли кислот, отдельно в нем вовсе не растворимые.

Соли кадмия, цинка и кобальта. Наоборот, применение дробного осаждения солей кадмия, цинка и кобальта показало, что во многих случаях этот метод может быть пригодным для разделения кислот различного строения. Наиболее удобными оказались соли кадмия. Уже первые опыты дробного осаждения растворов солей низкокипящих нефтяных кислот хлористым

кадмием показали, что первые фракции осаждения дают кислоты с низким удельным весом, соответствующим удельным весам жирных кислот, тогда как маточные кислоты кадмиевых солей дают кислоты с удельными весами, значительно большими, чем удельные веса исходных кислот.

Определения растворимости кадмиевых солей при комнатной температуре для некоторых жирных и циклических кислот дали результаты, показанные на таблице.

Содержание кадмиевых солей в 100 частях насыщенного водного раствора

Жирные кислоты		Циклические кислоты	
первичные			
$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-COOH$	0.60		0.39
	0.44		0.28
вторичные			
	3.90		1.52
	2.22		4.69
			7.15
			1.62
третичные			
	4.00		3.5

Как видно из таблицы растворимость кадмиевых солей для исследованных кислот с первичным радикалом очень мала как для жирных, так и для циклических кислот. Значительно больше она — для вторичных и для третичных кислот, но особенно велика для вторичных кислот с пятичленным циклом, содержащим карбоксил в ядре, и особенно велика для кадмиевой соли простейшей циклопентанкарбоновой кислоты.

Опыты разделения искусственных смесей различных кислот показали, что дробным осаждением кадмиевых солей кислот они действительно могут быть разделяемы. Приводим два примера.

1. Смесь из равных количеств нормальной гептиловой кислоты с температурой кипения 220° и кристаллической циклогексилкарбоновой кислоты с температурой кипения 230° нейтрализовалась едким натром и дробно осаждалась раствором теоретического количества хлористого кадмия, разделенным на шесть равных частей. Из фракций кадмиевых солей были выделены кислоты и после высушивания перегнаны. Первая фракция кипела при 218—220°, а последняя (из маточного раствора) при 226—229°. Эта последняя фракция после перегонки закристаллизовалась.

2. Смесь равных количеств (по 25 г) циклопентанкарбоновой кислоты с температурой кипения 216° и изоамилуксусной кислоты с температурой кипения 217—218° была осаждена хлористым кадмием в 5 приемов. Из кадмиевых солей были выделены кислоты и снова осаждены хлористым кадмием. То же повторено еще раз. После этого кадмиевые соли дали кислоту удельного веса 0.9178. Маточные растворы кадмиевых солей были соединены вместе, и из них были выделены кислоты. Последние были осаждены хлористым кадмием в растворе объемом 200 см³. Выделившаяся после стояния кадмиевая соль была отфильтрована, а из маточного раствора выделена кислота удельного веса d^{15} — 1.0252. Для чистой циклопентанкарбоновой кислоты d^{15} — 1.0452.

Ввиду этих результатов, нефтяные кислоты, полученные омылением фракций эфиров, кипящих между 156 и 167°, а также из фракции 181 — 184° были подвергнуты дробному осаждению хлористым кадмием.

Омыление производилось в водно-спиртовом растворе едким кали, очищенным алкоголем. Приводим пример.

55 г едкого кали растворялись в 50 см³ воды, и раствор разбавлен 150 см³ спирта. Щелочной раствор прибавлен к 120 г метилового эфира с температурой кипения 181—184°. Смесь нагревалась на водяной бане с обратным холодильником до исчезновения запаха метилового эфира. При этом смесь пожелтела. Спирт отогнан на водяной бане, а остаток упарен в чашке на кипящей водяной бане до возможно более полного удаления спирта. После этого остаток, мягкая густая масса, растворялся в воде, экстрагировался один раз абсолютным эфиром для удаления следов неомыленных продуктов. Водный раствор подкислялся серной кислотой, причем выделилось желтое масло. Последнее экстрагировалось эфиром, не содержащим алкоголя, эфирная вытяжка тщательно сушилась прокаленной серно-

натриевой солью. Остаток, представляющий полученные омылением кислоты, перегонялся. Получено 100 г кислот, кипевших при 231—234°, не обесцвечивавших раствора хамелеона.

Полученные кислоты имели свойства, показанные в таблице.

Таблица свойств нефтяных кислот, полученных омылением метиловых эфиров

Метил. эфир темп. кип.	Кислота темп. кип.	Свойства кислот
151—155	206—213	d^{18}—0.9259 d°—0.9328
155—158	210—215	d^{18}—0.9321 d°—0.9465
158—162	214—217	d^{18}—0.9310 d°—0.9453 n_D^{20}—1.4260 % Ag — 45.45; 45.42; 45.54
162—164	215—218	d^{18}—0.9326 d°—0.9538 n_D^{18}—1.4278 % Ag — 45.37; 45.30; 45.37
164—167	216—220	d^{18}—0.9398 d°—0.9538 n_D^{18}—1.4330 % Ag — 45.05
167—170	218—224	d^{18}—0.9481 d°—0.9621 % Ag — 44.65; 44.71
181—184	231—234	d^{18}—0.9602 n_D^{20}—1.4408 % Ag — 43.14
—	240—243	d^{18}—0.9701 n_{D20}—1.4471 % Ag — 43.08
—	247—250	d^{18}—0.9667 n_D^{20}—1.4492 % Ag — 41.85
—	255—258	d^{18}—0.9661 n_D^{20}—1.4530 % Ag — 40.41
—	268—268	d^{18}—0.9630 n_D^{20}—1.4556 % Ag — 38.96

Дробное осаждение нефтяных кислот хлористым кадмием

I. Фракция 155—158°. 15,2 г кислоты с температурой кипения 210—215° и удельным весом d^{18} — 0.9321; d° — 0.9465 растворялись осторожным прибавлением слабого раствора едкого натра до исчезновения мути. Раствор разводился до 500 см³ и осаждался 5%-м избытком 10%-го раствора чистого среднего хлористого кадмия, разделенного на три части. При первых двух осаждениях оседала кадмиевая соль в виде блестящих чешуек, которые были промыты водой и высушены; третье осаждение дало аморфную соль. Из этих солей и из маточного раствора были выделены кислоты.

1) Кислота из кристаллической кадмиевой соли кипела при 211—215° и имела удельных вес d^{18} — 0.9228; d° — 0.9366.

Дробное осаждение серебряной соли дало три фракции Ag — соли с содержанием % Ag — 46.7; 46.04; 45.6.

После вторичного осаждения кислоты хлористым кадмием, нового выделения кислоты и перегонки: d^{18} — 0.9199 d° — 0.9346.

2) Из аморфной соли получено всего 0.75 г кислоты с температурой кипения 214—218° и удельным весом d^{17}—0.9261.

3) Из маточного раствора получено 2.4 г кислоты удельного веса d^{18} — 0.9525.

Кислота была снова осаждена хлористым кадмием. После стояния в течение суток аморфная соль была отфильтрована, а из маточного раствора получено 0.8 г кислоты с удельным весом d^{17} — 0.9641.

Таким образом эта фракция состоит почти исключительно из жирных кислот, и именно из смеси кислот $C_6H_{12}O_2$ и $C_7H_{14}O_2$. Из циклических кислот в заметном количестве здесь могла бы содержаться лишь кислота циклопентанкарбоновая. Но в кислоте из маточного раствора с удельным весом d^{18} — 0.9525 этой кислоты может содержаться не более 30%, т. е., в исследованном количестве — не более 0.62 г.

II. Фракция 158—162°. Значительная часть этой кислоты была истрачена на предварительные опыты. При омылении 50 г эфира было получено кислоты с температурой кипения 214—216°—40.8 г и фракции 216—217°—4 г, т. е. всего 44.8 г. Содержание серебра в серебряной соли из главной фракции — 45.47%. Для первой фракции d^{18} — 0.9310.

При осаждении кислот хлористым кадмием получено 52.45 г кадмиевой соли и 9.4 г кислоты из маточного раствора, кипевшей главным образом при 214—218°, удельного веса d^{17} — 0.9572. После вторичного осаждения хлористым кадмием кислоты из маточного раствора из нового маточного раствора выделено 4.5 г кислоты с удельным весом d^{18} — 0.9715.

Из кадмиевой соли была снова выделена кислота и произведено вторичное осаждение ее хлористым кадмием. Получено из маточного раствора 1.4 г кислоты удельного веса d^{18} — 0.9551.

Из дважды осажденной кадмиевой соли получено 29.1 г кислот удельного веса d^{20} — 0.9209.

Таким образом, и эта фракция состояла почти исключительно из жирных кислот. В маточном растворе удельного веса d^{18} — 0.9715 могло содержаться лишь около 40% циклопентанкарбоновой кислоты, т. е. не

более 1.8 г, а вместе со вторым маточным раствором — около 2 г циклических кислот.

III. Фракция 162—164°. Кислоты кипели главным образом при 215—218°. d^{18} — 0.9326; d° — 0.9476. Серебряная соль содержала 45.35% Ag.

Из маточного раствора Cd-солей от 20 г кислот после третьего осаждения получилось 1.4 г кислот с температурой кипения 210—213° и удельным весом d^{20} — 0.9758; d° — 0.9901.

Из 8.8 г Cd-соли, три раза осажденной, представлявшей блестящие чешуйки, получена кислота, кипевшая при 217—219°, d^{18} — 0.9234.

В последних фракциях осаждения оседала зернистая кадмиевая соль, которая дала кислоту удельного веса d^{20} — 0.9394; d° — 0.9534. Последняя при вторичном осаждении дала кислоту, кипящую при 216—218° с удельным весом d^{20} — 0.9404; d° — 0.9547.

Таким образом, и здесь могли быть выделены жирные кислоты, а маточный раствор обогащался циклическими кислотами. Но кроме того, получалась довольно значительная промежуточная фракция кадмиевых солей, представляющая повидимому смесь солей жирных и циклических кислот (последних — немного).

IV. Фракция 164—167°, кислоты с температурой кипения 216—220°; d^{18} — 0.9398, d° — 0.9538. Содержание серебра в серебряной соли — 44.94%.

Из Cd-соли первой порции осаждения, еще раз осажденной, — кислота с температурой кипения 218—220°, $d^{17.5}$ — 0.9294%; Ag в Ag-соли 44.98.

Из маточного раствора — кислота d^{18}—0,9497. В Ag-соли Ag—45.25.

Промежуточные осаждения Cd-солей давали кислоты с промежуточными удельными весами.

V. Фракция 167—170°. Кислота кипела при 218—224°; d^{18}— 0.9481; d° — 0.9621. В Ag-соли — 44.68% Ag. Кислота вращала влево плоскость поляризации (см. выше).

VI. Фракция 181—184°. Для омыления было взято 120 г эфира. Получено 100 г кислоты с температурой кипения 231—234°, d^{18} — 0.9602; d° — 0.9741. В Ag-соли 43.14% Ag.

Первое осаждение теоретическим количеством хлористого кадмия, разделенным на две равные части, дало два осадка кадмиевых солей в виде порошков и маточный раствор. Выделенные из них кислоты имели удельные вес а при грубом определении: 1) 0.94; 2) 0.96; 3) 0.98.

Первая фракция солей после троекратного последовательного осаждения хлористым кадмием и выделения из солей кислот дала ясно кристаллический порошок Cd-солей. Выделенные из нее кислоты перегнаны при 229—232° и имели d^{18} — 0.9204 (около 10 г).

Осаждение раствора кислоты в едком натре азотнокислым серебром дало фракции серебряной соли в которых было найдено содержание серебра: 1) 43.10%; 2) 43.17%; 3) 43.22%.

Вычислено для $C_8H_{15}O_2Ag$ — % Ag — 43.03

Таким образом, фракция из кадмиевой соли состояла из жирных кислот с восемью атомами углерода в молекуле.

Кислота дала амид, который после кристаллизаций сначала из бензола, а затем из бензина представлял листочки с температурой плавления 87—89°.

Кислоты из маточного раствора еще три раза последовательно осаждались хлористым кадмием, и осадки отфильтровывались. Кислота из последнего маточного раствора (около 10 г) кипела также при 229—232°, но имела удельный вес d^{18} — 0.9985. Содержание серебра в трех фракциях серебряных солей: 1) 44.28; 2) 44.19; 3) 44.31.

Вычислено для $C_7H_{11}O_2Ag$ — 45.76
$C_8H_{13}O_2Ag$ — 43.37.

Амид, полученный из этой фракции, при кристаллизации из бензола давал смесь пластинчатых кристаллов, плавившуюся не резко в пределах 135—140°. При дальнейшей кристаллизации сначала из бензола, а затем из воды можно было получить на вид однородные иголочки с температурой плавления 169—171°.

Найденный для этой фракции осаждения кислот удельный вес совпадает с имеющимися в литературе указаниями для циклических кислот C_8 производных циклопентана, но содержание серебра в серебряной соли указывает на присутствие кислоты C_7. Таковой по температуре кипения может быть только циклогексанкарбоновая кислота. Это до некоторой степени подтверждается тем, что приготовленная из кислоты кадмиевая соль растворялась в воде при комнатной температуре в количестве, приблизительно 2 ч. на 100; тогда как растворимость кадмиевых солей метилциклопентанкарбоновых кислот значительно больше, а циклопентилуксусная кислота должна была осесть в первых порциях осаждения кадмиевых солей.

Присутствие в этой фракции циклогексанкарбоновой кислоты было доказано дегидрогеизацией метилового эфира палладием; по Зелинскому и

нахождением в продукте дегидрогенизации бензойной кислоты, о чем мною было доложено на упомянутом Тифлисском съезде в 1913 г.

Дегидрогенизация эфира с температурой кипения 181—184°. Перегнанные кислоты, полученные омылением 75 г эфира растворялись в едком натре, и к раствору прибавлен 5%-ый раствор хамелеона. Смесь взбалтывалась в течение часа, после чего хамелеон разрушался кипячением со спиртом. Из отфильтрованного от перекиси марганца раствора солей кислоты снова выделялись и превращались в метиловые эфиры, которые кипели в прежних пределах и заметно не изменили своего удельного веса (d^{18} — 0.9201).

62 г такого эфира медленно пропускались в токе водорода через палладиевый контакт, приготовленный по Зелинскому при температуре 300—320°. Собранный эфир еще раз пропускался через свеже-приготовленный контакт. Собранный эфир был подвергнут троекратной фракционировке с трехшариковым дефлегматором Лебеля, отбиралась фракция с температурой кипения выше 185°. Таковой получилось 5.2 г удельного веса d^{18} — 0.9422. Эта фракция была омылена; кислоты растворялись в едком натре и подвергались дробному выделению прибавкой серной кислоты и отгонкой с водяным паром. Последняя фракция выделения после прибавления избытка серной кислоты была экстрагирована эфиром. После высушивания и отгонки эфира и перегонки получилось 0.45 г кислоты, которая была поставлена в эксикаторе на несколько дней при температуре, колебавшейся между 15 и 24° со внесением ничтожного кристаллика бензойной кислоты. При стоянии выделились кристаллы, которые были отделены на пористой пластинке и очищены возгонкой. Получилось около 0.02 г снежно белых кристаллов, которые по температуре плавления и по запаху метилового эфира оказались бензойной кислотой.

В кислотах из того же эфира, неподвергавшегося дегидрогенизации, попытки обнаружить присутствие бензойной кислоты дали отрицательные результаты.

Опыты с реакциями расщепления нефтяных кислот

Нами был произведен ряд опытов, имевших целью отщепление карбоксила и получение соединений, содержащих в молекуле на один атом углерода меньше, чем в исходных кислотах. Здесь сообщим лишь о том методе, который был применен, кроме опытов с высшими кислотами, также для исследования кислот из фракции метиловых эфиров с температурой кипения 181—184°. Метод состоял в следующем ряде реакций:

1) Бромирование кислот по Гелль-Форльгард-Зелинскому.[1] С целью превращения кислот в бромангидриды α-бромозамещенных кислот.

$$C_n H_{2n-1}—COOH \rightarrow C_n H_{2n-2} Br—CO—Br.$$

2) Превращение последних в оксикислоты.[2]

$$C_n H_{2n-2} Br—COBr + 2 H_2O \rightarrow C_n H_{2n-2} (OH) — COOH.$$

3) Отщепление от оксикислот муравьиной кислоты с превращением в альдегиды или кетоны.[3]

$$C_n H_{2n-2}\begin{cases} OH \\ COOH \end{cases} = HCOOH + C_n H_{2n-2} = O$$

Опыт с кислотой из метилового эфира с температурой кипения 181—184°

К смеси 20 г кислоты с температурой кипения 231—234° и 1.5 г красного фосфора прибавлялось по каплям 53 г брома. Когда весь бром был прибавлен, колба нагревалась на водяной бане при 75° до тех пор, пока пары брома не переставали сгущаться в холодильнике. Тогда баня доводилась до кипения, и нагревание продолжалось до полного исчезновения паров брома. Продукт реакции выливался в ледяную воду, а выделившийся бром-бромангидрид промывался ледяной водой для удаления фосфорной и бромисто-водородной кислот. Сырого бром-бромангидрида получилось около 90% теоретического количества.

Получение оксикислот. Бром-бромангидрид вливался в трехлитровую колбу. Туда же прибавлялся раствор 48 г едкого кали в 600 см³ воды. В эту смесь пропускался перегретый водяной пар в течение трех часов. Еще горячая жидкость фильтровалась и разлагалась прибавлением серной кислоты. Эфирная вытяжка сушилась сернонатриевой солью. Эфир отгонялся. В остатке после продолжительного сушения в эксикаторе над серной кислотой осталось 17 г сырых оксикислот, представлявших густую темную жидкость.

Сухая перегонка оксикислот. 20 г сырых оксикислот перегонялись из колбы с коротким дефлегматором. Дестиллат начал перегоняться при 130°, а затем температура постепенно повышалась до 300°. Дестиллат

[1] Ж. Х. О., 19, 585.
[2] Hell, Ssadovsky. Ber. 24, 2390.
[3] Le Sueur. Journ. Chem. Soc. 85, 8271 (1904).

обрабатывался щелочью. Щелочной раствор промывался эфиром и разлагался разбавленной серной кислотой. Экстрагированные эфиром кислоты после сушки и отгонки эфира при перегонке кипели между 230 и 250°. Главные же две фракции перегонялись при 1) 235—239° и 2) 239—250°. Всего кислот получилось 6.8 г. Кислоты обезцвечивали хамелеон и присоединяли бром.

1) Фракция имела d^{18} — 1.0125 d° — 1.0247.

2) » » d^{18} — 1.0236 d° — 1.0355.

По удельному весу ненасыщенные кислоты являются почти исключительно циклическим, и так как циклогексен — 1.2-карбоновая кислота (температура кипения 240—243°, температура плавления 29°) имеет d^{20} — 1.1089, удельный же вес ненасыщенных кислот C_8 с пентаметилиновым циклом неизвестен, но он не может быть выше уд. веса наших кислот.

Эфирный раствор нейтральных составных частей дестиллата сушился сернонатриевой солью, и эфир отгонялся. Остаток, представлявший сырую смесь альдегидов и кетонов, давал реакцию с фуксиносернистой кислотой. Такой смеси получено 5 г. Для отделения альдегидов от кетонов эта смесь настаивалась со свежеосажденной влажной окисью серебра, причем альдегиды окислялись в кислоты. После отгонки эфира от высушенного раствора остался остаток кетонов, не дававший реакции с фуксиносернистой кислотой, кипевший в широких пределах от 130 до 170° (1.9 г), но главная фракция кипела выше 160°.

Серебряные соли, находящиеся в смеси с серебром и окисью серебра, обрабатывались слабой азотной кислотой. Выделенные кислоты извлекались эфиром. Эфирная вытяжка сушилась, эфир отгонялся. Сырых кислот получилось около 2 г.

При перегонке получились фракции: 1) 209—230, 2) выше 230 (немного). Удельный вес первой фракции d^{18} — 0.9423; d° — 0.9548. Полученная из нее серебряная соль содержала Ag — 45.63%.

Вычислено для $C_7H_{13}O_2Ag$ — %Ag — 45.57
$C_7H_{11}O_2Ag$ — %Ag — 45.96.

Таким образом, полученные альдегиды содержат в своей молекуле 7 атомов углерода и являются почти чистыми альдегидами.

Ряд опытов, произведенный в совершенно аналогичных условиях с циклогексанкарбоновой кислотой, показал что из нее получаются лишь следы циклогексанона, а главным продуктом является циклогексен = 1.2-карбоновая кислота.

Ряд опытов с вышекипящими фракциями кислот (фракции 255—265° и 265—275°) показал, что при аналогичном ряде реакций они дают также как смесь альдегидов и кетонов, так и ненасыщенные кислоты. Например, 20 г оксикислот из фракции 255—265° дали 6 г смеси альдегидов и кетонов и 7 г ненасыщенных и непрореагировавших (третичных) кислот. 20 г оксикислот из фракции 265—275° дали 6.3 г кислот и 4.3 г альдегидов и кетонов; из последней смеси получено 4.1 г кристаллического бисульфитного соединения давшего с раствором соды 2.1 жидкого вещества, состоявшего почти нацело из альдегидов, и около 1 г непрореагировавшего с бисульфитом масла, неприятного мятного запаха, не дававшего реакции с фуксиносернистой кислотой, т. е. состоявшего из кетонов.

Выводы

1) Низшие фракции исследованных нами кислот бакинской нефти состоят почти исключительно из жирных кислот. Нами доказано присутствие в них кислот изоамилуксусной и диэтилпропионовой.

2) Начиная от фракций, кипящих при 215°, кислоты уже содержат примесь циклических кислот. С повышением температуры кипения фракций количество циклических кислот увеличивается, и фракции, кипящие выше 260°, уже представляют смесь циклических кислот, не содержащую или содержащую лишь небольшую примесь жирных кислот.

3) Жирные кислоты низших фракций — преимущественно первичные, а циклические кислоты в них — преимущественно вторичные. Последнее заключение находится в некотором несогласии с выводом Брауна, утверждающего, что нафтеновые кислоты являются исключительно, или почти исключительно кислотами первичными.

Присутствие третичных кислот пока не было доказано точными опытами.

4) Присутствие в кислотах нефти небольшого количества простейшей кислоты с пентаметиленовым циклом, т. е. циклопентанкарбоновой кислоты можно считать весьма вероятным. Совершенно точно доказано присутствие циклогексанкарбоновой кислоты, простейшей кислоты с шестичленным циклом.

5) Метод дробного осаждения солей кадмия (и некоторых других тяжелых металлов) может дать ценные результаты при исследовании смесей кислот. Для низших кислот нефти он позволяет отделять большую часть жирных кислот от кислот циклических.

6) В кислотах нефти содержатся оптически деятельные кислоты.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О СЕНСИБИЛИЗАЦИИ ДРОЖЖЕЙ КРАСКАМИ К РЕНТГЕНОВЫМ ЛУЧАМ

А. Д. ПМШЕНЕЦКОГО

(*Представлено академиком* Г. А. Надсоном)

Увеличение дозы лучей Рентгена, без риска повредить здоровые ткани, возможно лишь до известного предела. Отсюда вытекает необходимость привести освещаемые элементы к состоянию повышенной чувствительности тем самым получить более эффективное действие лучей. Таким путем можно получить не только усиленное, но и избирательное действие Рентгена. Подобная возможность может иметь место, например, при освещении сенсибилизированных патогенных микробов в организме.

Все это объясняет, тот рост интереса к изучению условий сенсибилизации клетки к лучистой энергии, который наблюдается в последнее время. Изменить реактивную способность клетки, сделать ее более чувствительной к лучам — эта проблема представляет интерес и в теоретическом и в практическом отношении.

Данная работа начатая нами по предложению акад. Г. А. Надсона является непосредственным продолжением тех исследований, которые велись им и его сотрудниками в течение ряда лет по вопросу о действии Рентгеновских лучей на клетку. Основной задачей было выяснить возможность сенсибилизации дрожжей к лучам Рентгена и установить изменения наступающие в клетках от действия сенсибилизаторов. Последними в наших опытах были растворы красок, так как среди различных фотодинамических веществ они занимают видное место. Дрожжи, как объект для исследования имеют преимущество перед бактериями в силу того, что наступающие в них морфологические изменения легко доступны для наблюдения.

Прежде чем приступить к изучению комбинированного действия красок и лучей нами предварительно было изучено влияние, оказываемое на дрожжи каждым из этих факторов в отдельности и в первую очередь красок. В этом направлении были исследованы следующие краски: Neutralrot, Cresylblau, Eosin, Bismarkbraun, Kongorot, Tryanblau. Все краски от Grübler'a

Применявшаяся методика. Из суточной культуры *Saccharomyces cerevisiae* (берлинская винокуренная раса XII) приготовлялась взвесь дрожжевых клеток в среде Гайдука. С помощью пипетки 0.3 см³ этой взвеси переносилось в пробирку и туда же добавлялось такое же количество раствора краски. Разведение основного раствора краски, сохранявшегося обычно в темноте, производилось непосредственно перед опытом. Концентрация устанавливалась $^1/_{50}$, $^1/_{500}$, $^1/_{5000}$, $^1/_{50000}$ с тем расчетом, чтобы после прибавления раствора краски к равному объему взвеси дрожжевых клеток мы имели бы разведения $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$, $^1/_{10000}$ и $^1/_{100000}$. В дальнейшем пробирки сохранялись в темноте. Через определенные сроки содержимое пробирки высевалось на чашки Петри с 2%-м сусло-агаром, которые сохранялись в дальнейшем при 25°. Контролем служил посев такого же количества взвеси дрожжей, к которой в начале опыта прибавлялось 0.3 стерильной водопроводной воды. Сопоставляя количество выросших колоний с контрольным посевом мы получали % гибели клеток, т. е. степень токсичности краски. Подсчет колоний производился на 4-й день после посева. Данные подсчета 20—30 чашек давали нам возможность установить средние цифры по отношению к каждой краске.

Результаты этих опытов показали, что токсичность красок весьма различна. На приведенной диаграмме (см. фиг. 1 и 2) изображено в % количество оставшихся в живых клеток по отношению к контролю принимавшегося за 100%.

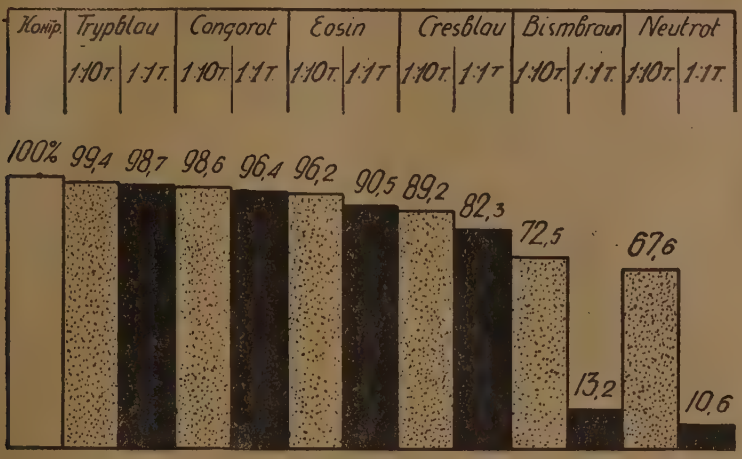
Краски расположены в порядке возрастающей ядовитости. Наиболее сильное действие оказывает раствор нейтральрота, наименее сильное трипанблау. Пребывание дрожжей в растворе нейтральрота и бисмаркбрауна одной и той же концентрации в течение 24 ч. сопровождается уменьшением числа выросших колоний приблизительно в 3 раза по сравнению с одночасовым действием. С другой стороны, действие высокой концентрации этих красок в течение краткого периода времени более интенсивно, чем длительное действие слабого раствора. У других красок это выражено в меньшей степени. Сказанное может быть иллюстрировано следующими цифровыми данными:

Опыт № 26, цифры указывают на количество выросших колоний

(Обозначение 1:1 т., 1:10 т. соответствует концентрации 1:1000, 1:10000)

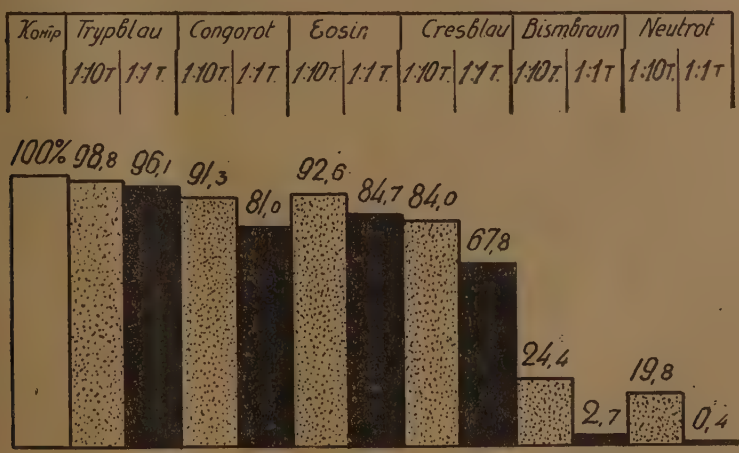
Краска	Нейтральрат		Эозин		Трипанблау		Контроль	
Концентрация	1:1 т.	1:10 т.	1:1 т.	1:10 т.	1:1 т.	1:10 т.		
Срок опыта 1 ч.	70	412	625	662	676	683	720	677
Срок опыта 24 ч.	0	135	578	632	662	678	654	708

Следовательно изменения в клетках, ведущие их к гибели, могут наступать под влиянием раствора краски в течение первого часа.



Фиг. 1. Действие 1 час.

Определяя степень токсичности красок мы параллельно изучали изменения наступающие в дрожжевой клетке. Для этого мы брали как непосред-



Фиг. 2. Действие 24 часа.

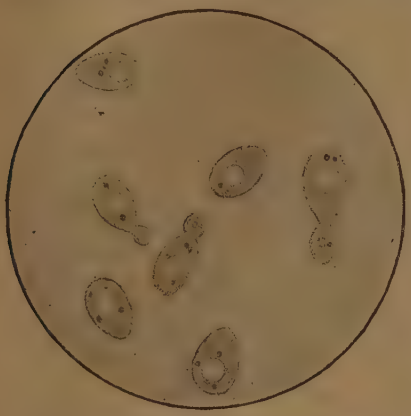
ственно после прибавления раствора краски к взвеси дрожжей, так и спустя различные сроки каплю для микроскопического исследования.

Произведенные наблюдения показали, что от действия красок клетки претерпевают ряд изменений.

В 1925 г. Надсон в работе посвященной вопросу о действии лучей радия и Рентгена на дрожжи указал, на то, что в изменениях наступающих в клетках от действия этих лучей могут быть установлены две фазы. Для первой ранее наступающей фазы характерно: увеличение размеров самой клетки и ее вакуоли, мелкая зернистость протоплазмы, большее содержание жира и замедленное прохождение раствора нейтрал рота внутрь клетки. Название второй фазы присваивается тем изменениям, которые уже носят некробиотический характер. В этих случаях уменьшается как сама клетка, так и вакуоля в ней, последняя приобретает щелевидный характер, протоплазма становится грубо зернистой и проницаемость клетки для краски повышена против нормы. Дальнейшее изучение этого вопроса предпринятое Надсоном и Штерн показало, что под влиянием ультрафиолетовых и Рентгеновских лучей наступают изменения в клетках характерные для этих фаз, но этим депрессивным изменениям постоянно предшествует быстро наступающий и скоро проходящий период возбуждения. Для него характерно изменение формы вакуоли, которая приобретает различные очертания, в остальном клетка ничем не отличается от обычной. Таким образом, этими исследованиями было установлено, что «лучи вызывают 3 последовательные фазы изменений; первая фаза — эта фаза возбуждения вторая и третья — это фазы депресси и некробиоза, дегенерации и смерти».

В наших опытах первым указанием на действие краски также является изменение формы вакуоли (см. фиг. 3). Ее правильное очертание утрачивается, в ней появляются «ущербы» вследствие того, что протоплазма вдается в одном или в нескольких местах. Таким образом вакуоли приобретают грушевидную, серповидную или иную неправильную форму. В остальном клетки ничем не отличаются от контрольных (см. фиг. 4). Эти реактивные изменения в клетке обнаруживаются в течение первых 10 мин. от действия краски. Следующая фаза характеризуется увеличением вакуоли, которая может достигать таких размеров, что протоплазма окаймляет вакуолю в виде узкой полоски. Количества жира в таких клетках больше, чем в контрольных, протоплазма их менее гомогенна и прозрачна и приобретает более крупно-зернистый характер (см. фиг. 5). Такие клетки начинают появляться спустя различные сроки в зависимости от степени токсичности краски. Для третьей фазы являющейся конечной характерно уменьшение размера клеток. Чаще они становятся удлиненными, вакуоли в них или совершенно не обнаруживаются или носят щелевидный характер, прото-

плазма грубо-зерниста и клетки интенсивно окрашиваются. Реже попадаются небольшие клетки правильной круглой формы, лишенные вакуоли и также окрашенные в сильной степени. Размер этих клеток равен 2.5—3.5 μ в то



Фиг. 3. Нормальные дрожжевые клетки.

Фиг. 4. Изменение формы вакуоли (первая фаза).

Фиг. 5. Увеличение размера вакуолей, накопление жира, вакуолизация протоплазмы (вторая фаза).

Фиг. 6. Конечные изменения клетки некробиотического характера (третья фаза). Уменьшенные в размерах, вытянутые в длину или круглые клетки, щелевидная форма вакуоли или отсутствие ее, грубая зернистость протоплазмы и утолщенная оболочка.

время как нормальных клеток 7—9 μ. Как для удлиненных так и для круглых клеток характерно присутствие утолщенной, слабо окрашенной оболочки (см. фиг. 6). В качестве примера приводим результаты некоторых исследований.

Опыт 84

Нейтральрот	1:1 т.	1:10 т.	1:100 т.
10 м.	1	1	1
1 ч.	2.3	2.3	2
4 ч.	3.2	2.3	2
24 ч.	3	3.2	2.3

Опыт 85

Бисмаркбраун	1:1 т.	1:10 т.	1:100 т.
10 м.	1	1	1
1 ч.	2.3	2.3	2
4 ч.	3.2	2.3	2
24 ч.	3	3.2	2

Опыт 90

Эозин	1:1 т.	1:10 т.	1:100 т.
10 м.	1	1	1
1 ч.	2	2	N, 2
4 ч.	2.3	2	N, 2
24 ч.	2.3	2	2

Опыт 92

Трипанблау	1:1 т.	1:10 т.	1:100 т.
10 м.	1	1	1
1 ч.	N, 2	N, 2	N
4 ч.	N, 2	N, 2	N
24 ч.	2, N	N, 2	N

Обозначения: 1—1-я фаза, 2—2-я фаза, 3—3-я фаза, N — нормальные клетки. Первое обозначение указывает на преобладание в препарате клеток с этими изменениями.

Таким образом при действии одних красок (эозин, конгорот) клетки с изменениями характерными для третьей фазы, встречаются редко, другие же краски (бисмаркбраун, нейтральрот) приводят большинство клеток к этим изменениям.

При сопоставлении результатов микроскопических исследований с полученными данными о токсичности красок мы имеем полное совпадение. Максимальное количество клеток находящихся в третьей фазе наблюдалось при действии нейтральрота. Располагая краски в убывающем порядке по степени частоты, с которой встречались эти клетки, мы будем иметь: нейтральрот, бисмаркбраун, крезильблау, эозин, конгорот. При действии на дрожжи трипанблау клетки с изменениями для третьей фазы не могли быть обнаружены. Что касается сроков появления этих изменений, то здесь мы имеем также полное соответствие со степенью токсичности краски. Сокращение срока опыта при одинаковых концентрациях сопровождалось уменьшением их числа. Имея таким образом значительные колебания в степени токсичности для дрожжей различных в условиях опыта применявшихся нами красок мы видим, что эти колебания находят себе объяснение, в тех морфологических изменениях, которые наступают в дрожжевых клетках от действия красок. Одни краски вызывают лишь изменения не доходящие до третьей фазы, другие приводят к появлению большого количества клеток с резкими нарушениями в их морфологической структуре. Как первая фаза «возбуждения», так и последующие две фазы, указывающие на постепенность в развитии некробиотических изменений, зависящих от нарушения физико-химического состояния клетки, могут возникнуть

не только от действия красок но как уже говорилось выше и от других причин — лучей Рентгена, радия, ультрафиолетовых.

Что касается токсичного действия красок вообще, то оно в весьма значительной степени зависит от характера объекта. Так Janagihara, изучая влияние 30 красок на бактерии 15 различных видов, пришел к выводу, что бактерицидное действие красок незначительно. Reitz в свое время также обнаружил, что 1%-й раствор эозина не задерживает роста *B. typhi*. В противоположность имеющимся и в ряде других работ указаниям на малую чувствительность бактерий к краскам, простейшие переносят лишь их слабые растворы (Baldwin, Prowazek и др.). По степени своей чувствительности дрожжи таким образом занимают среднее между бактериями и простейшими место. В свою очередь чувствительность различных грибков к краскам также не одинакова, как это показал Guillermond.

Обычно указывается не только на видовые, но и на индивидуальные колебания в чувствительности объектов, что побудило нас обратить внимание на это обстоятельство. Тот факт, что на ряду с преобладающими по числу клетками в третий фазе встречаются и мало измененные клетки по̀видимому может быть объяснен неодинаковой индивидуальной чувствительностью их. В ряде случаев мы могли отметить более раннее наступление третьей фазы в почках, чем в материнской клетке. Это дает основание предполагать, что молодые клетки более восприимчивы, чем более старые.

Говоря о токсичности, необходимо коснуться вопроса о механизме прижизненной окраски дрожжевой клетки. В одних случаях она зависит от видимого проникновения краски внутрь клетки, в других — абсорбируется только оболочкой. По мнению Euler'a и Florell'я, второй способ окрашивания у дрожжей — наиболее частый. Весьма существенным является вопрос в какой мере прижизненное окрашивание отражается на клетке независимо от того каким путем оно произошло. Ряд исследователей (Kono, Vorhoeve, Politzer и др.) указывают, что прижизненная окраска вообще влечет за собой нарушение жизненных функций клетки, а по отношению к некоторым краскам, как напр. трипанблау возможность окраски непосредственно связана с повреждением самой клетки. Отсюда следует, что прижизненная окраска приводя в зависимости от физико-химических свойств, срока действия и концентрации краски к различным изменениям в клетке, тем самым понижает их сопротивляемость к внешним вредно действующим факторам.

Следующим этапом в нашей работе было изучение действия одних лучей Рентгена. Для нас являлось важным установить в процентном отношении гибель дрожжевых клеток от определенной дозы. С этой целью

мы освещали 0.5 см³ взвеси клеток приготовленной непосредственно перед облучением из 24 ч. культуры. Освещение производилось аппаратом Symétrie, газовая трубка, без фильтра, 95 kV, 2 mA. Расстояние от антикатода 16 см. Общая доза 10 HED (25 мин., 1 HED в 2.5 мин.). Непосредственно после освещения 0.3 см³ взвеси высевалось на чашки Петри с сусло-агаром. Посев такого же количества неосвещенной взвеси служил контролем. Таким путем нами было установлено, что от вышеуказанной дозы наступает гибель 40% клеток. Эти результаты являются лишним доказательством того, что и для частичной гибели клеток требуется столь большие дозы, что они не имеют практического применения. Общепризнанная малая чувствительность микроорганизмов к лучам Рентгена и объясняет направление работ исследователей последнего времени. Различными способами они пытаются создать условия для повышения бактерицидного действия X-лучей. Сюда следует отнести применение мягких (Schepmann u. Flecke, Gaertner) или катодных лучей (Baensch u. Finsterbusch), по мнению этих авторов действующих сильнее. Далее к ним могут быть причислены весьма интересные, как по своему теоретическому обоснованию, так и по своим результатам, опыты с вторичными лучами, возникающими при употреблении металлов (Надсон и Штерн, Bolhuis, Trillat и др.). Повышение t° окружающей объект среды, с той целью что бы стимулируя этим размножением, подействовать лучами именно в этот период понижения сопротивляемости — есть также один из способов усилить действие лучей. На ряду с этими далеко не исчерпанными попытками найти лучшие условия для бактерицидного действия Рентгеновских лучей имеются работы, внимание исследователей в которых обращено таким образом на возможность повысить чувствительность клетки применением различных флуоресцирующих веществ и красок. Эти исследования явились логическим следствием тех более ранних работ, где влияние аналогичных условий было изучено по отношению к солнечному свету. Возможность получить значительную фотосенсибилизацию к солнечному свету явилось предпосылкой для соответствующих работ с X-лучами. В связи с этим обратимся к имеющимся в литературе взглядам на сущность сенсибилизации к свету.

Raab в 1900 г. впервые своими опытами с *Paramaecium* доказал, что в присутствии акридина они погибают от действия солнечного света в более краткий срок чем без него. Разбирая механизм действия, он подверг анализу 3 возможности. Влияние акридина на свет, действие света на *Paramaecium* и на раствор акридина. По его мнению первые две возможности должны быть отвергнуты и основной причиной сенсибилизации является способность

раствора флуоресцировать под влиянием света. Наиболее активные лучи это те, которые вызывают сильную флуоресценцию.

К аналогичным результатам пришел Dreyer в своих опытах с инфузориями, которые погибали от действия света в присутствии эритрозина в течение 10 сек., контрольные же только спустя 9 мин. Такие же исследования над *Bact. prodigiosum* не дали положительных результатов. Jodlbauer u. Tappeiner в ряде работ, изучая действие эозина, флуоресцеина, эритрозина, розбенгала и др. красок на простейшие, бактерии и энзимы, установили возможность сенсибилизации их к свету с помощью этих красок. Эти авторы приходят к выводу, что фотодинамический эффект зависит от способности раствора флуорисцировать. Только вещества обладающие этой способностью могут быть сенсибилизаторами. По своему происхождению они весьма различны и могут быть вырабатываемы так же бактериальной клеткой, напр. *B. pyocyaneum*.

В последнее время вопрос о флуоресценции сенсибилизаторов снова был поднят и получил иное освещение.

В 1924 г. Надсон и Жолкевич, подвергая семена белой горчицы действию растворов эозина, нейтральрота и фуксина и следя за прорастанием их в темноте и на свету установили фотодинамическое действие этих красок. Так как в их опытах, не флуоресцирующий, обладающий ядовитым действием фуксин так же оказывал на свету сильное влияние, то они приходят к выводу, что флуоресценция не является необходимой для фотодинамического действия. Passow u. Ripmann своими исследованиями с генцианвиолетом не обладающим флуоресценцией, но проявившим фотодинамический эффект, также дали фактический материал для пересмотра этого вопроса. Далее Janagihara на основании большого экспериментального материала считает необоснованной тесную связь между флуоресценцией и фотодинамическим действием. Таким образом, едва ли правильно исключать из списка фотодинамических сенсибилизаторов то или иное вещество руководствуясь тем, что оно лишено способности к флуоресценции.

Обратимся к ядовитым свойствам сенсибилизаторов.

Kudo u. Jodlbauer действовали на токсины и сыворотки эозином и розбенгалой при чем, оказалось, что и без доступа света они ослабляют действие сывороток и токсинов.

Указания на ядовитое действие эозина в темноте имеются и в работе Надсона и Жолкевич. Такие же свойства этой краски были отмечены и Straub'ом. Предельное переносимое *Paramaecium* разведение нейтраль-

рота было по наблюдениям Baldwin'a очень значительным (1 : 200 тыс.), дальнейшее же повышение концентрации сопровождалось их гибелью.

Итак мы видим, что фотодинамические вещества и в темноте оказывают токсичное действие. К этому вопросу мы еще вернемся, когда будем говорить о результатах собственных исследований.

Неодинаковая чувствительность простейших, грибков и бактерий к одному и тому же сенсибилизатору и источнику лучистой энергии, неодинаковое действие различных лучей на один и тот же освещаемый объект, а также несходная методика опытов, все это осложняет сопоставление результатов полученных различными авторами.

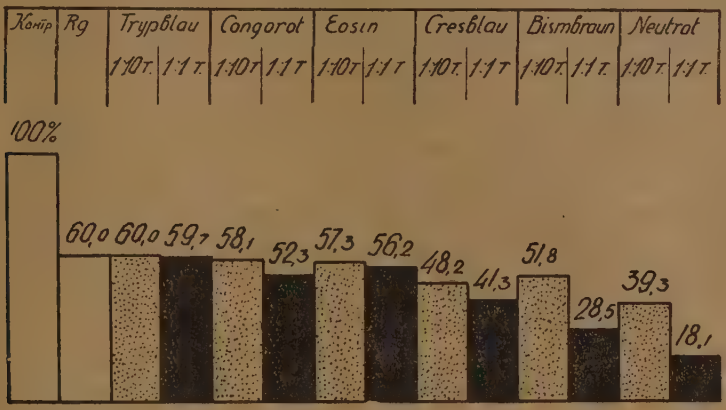
Так Mettler безуспешно пытался подействовать на бактерии одновременно красками и лучами Рентгена. Он освещал в течение 105 мин. патогенных микробов в присутствии флуоресцеина, эозина и эритрозина и получил отрицательные результаты, т. е. отсутствие полной стерилизации того эффекта которого он добивался. Janagihara в своих опытах с 15 видами бактерий, пользуясь в качестве сенсибилизаторов различными красками, так же не наблюдал фотодинамического эффекта при действии Rg лучей. У обоих приведенных авторов такие же опыты с солнечным светом сопровождались отчетливой сенсибилизацией бактерий к свету.

К совершенно противоположным результатам пришел Peacock. Его исследования представляют интерес так как он действовал на микроорганизмы параллельно in vitro и в организме животного. Сенсибилизатором у него был Fluorit (Calciumphosphowolframat) в качестве объекта для исследования *Staph. aureus* и *B. coli*. На основании своих опытов он пришел к выводу, что освещение X-лучами в комбинации с Fluorit'ом как in vitro так и in vivo обладает более сильным действием, чем одно только освещение лучами.

Перейдем к изложению собственных исследований.

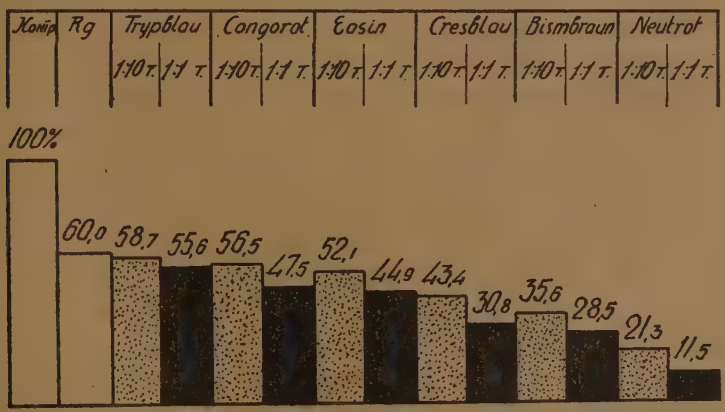
Установив данные касающиеся действия красок и одних лучей Рентгена, мы получили возможность приступить к дальнейшим опытам, которые явились нашей основной задачей, т. е. выяснить возможность сенсибилизации дрожжей к лучам. Для этого мы подвергли освещению клетки находившиеся предварительно в растворе краски. Доза освещения была та же что и в опытах без применения краски. Методика постановки опытов в основном была такая же как и в опытах с изучением действия одних лучей. Каждая серия опытов заключала в себе три контроля: 1) посев не освещенных и не находившихся в растворе красок дрожжевых клеток; 2) не освещавшихся дрожжей, но подвергавшихся действию красок; 3) освещавшихся, но не бывших в растворе красок.

Количество взвеси как в основных опытах так и в контрольных было 0.5 кб. см. Вычисление количества погибших клеток производилось путем подсчета колоний и сопоставления этих данных с контрольным посевом.



Фиг. 7. Предшествующее освещению действие краски 1 час. Освещение Рентгеновыми лучами 25 мин. (10 HED).

Опыт показал, что учитывать результаты необходимо не ранее чем через 5—7 дней при нахождении чашек при 20°.



Фиг. 8. Предшествующее освещению действие краски 24 часа. Освещение Рентгеновыми лучами 25 мин. (10 HED).

Трехдневный срок недостаточен, так как начало видимого роста колоний возможно и позднее.

Как видно из прилагаемой диаграммы (см. фиг. 7 и 8) клетки находившиеся предварительно в растворе красок оказываются более чувстви-

тельными, чем контрольные, что позволяет говорить о сенсибилизации клеток к Rg. лучам. Все же ни одна из применявшихся нами красок, при данных концентрациях и условиях опыта не может быть названа «совершенным» по отношению к дрожжам сенсибилизатором. Установление одного факта повышения чувствительности к свету, без учета токсичного действия самого раствора, не имеет решающего значения. В наших же опытах часть красок, хотя и обладала способностью сенсибилизировать, но эти же краски вызывали и гибель значительного числа клеток. Мало или почти не ядовитые краски давали небольшой эффект при конбинированном действии. Наилучшие в этом смысле результаты были получены с эозином и крезильблау, создававших значительную сенсибилизацию при сравнительно слабой токсичности самого раствора. Так как можно было предположить, что повышение чувствительности зависит от изменения свойств раствора краски после освещения, то нами дополнительно были поставлены следующие опыты. Растворы красок различной концентрации подвергались освещению (доза та же что и в опытах с освещением дрожжевых клеток), а затем в них помещались дрожжи. Контролем в данном случае служили те пробирки в которых дрожжи находились в неосвещенной предварительно краске. Таким путем было установлено, что после освещения растворы красок ни усиливают ни ослабляют своего действия. Количество выживающих клеток и скорость появления изменений в самой клетке в обоих случаях одинаковы. В свою очередь применение в качестве сенсибилизатора уже освещенной краски дало такие же результаты как и неосвещенной предварительно краской. Следовательно причина сенсибилизации кроется не в нарушении физико-химического состояния раствора, в котором находятся клетки, а в новых свойствах возникших в освещаемом объекте при данных условиях. В пользу этого говорят и опыты Штерн, показавшие, что нет резкой разницы в результатах опытов при употреблении предварительно облученного субстрата и не подвергавшегося освещению. Наши исследования показали, что непременным условием для наступления сенсибилизации является проникновение краски или абсорбция ее оболочкой. Это соответствует тем литературным данным (Jodlbauer u. Tappeiner), в которых указывается, что не проникающие вещества не являются сенсибилизаторами. Не безинтересно здесь привести так же указания Straub'a на то, что он не видел фотодинамического действия на животных с плотной кутикулой (дафнии и др.), через которую было затруднено прохождение сенсибилизатора.

Выше мы уже говорили о том, что прижизненное окрашивание клетки не может не нарушать ее нормального физико-химического состояния.

И вполне очевидно, что сопротивляемость такой клетки и новому фактору, в частности лучам Рентгена, будет понижена. Отсюда вытекает вопрос о комбинированном действии лучей и других более или менее токсических веществ вообще. Другими словами обладает ли фотодинамический сенсибилизатор специфическим действием? Так как предположить существование вещества, которое повышая чувствительность клетки к лучам в то же время совершенно не действовало бы на клетку едва ли возможно, то разрешение вышепоставленного вопроса будет зависеть от сопоставления результатов влияния данного вещества и комбинированного действия.

Многие ядовитые вещества, действуя токсически на клетку, делают ее менее стойкой и к лучам. Такая сенсибилизация к лучам радия, как это следует из работы Надсона и Жолкевич, приводит к заключению, что «усиление депрессивного влияния здесь зависит не от образования и действия в организме «вторичных лучей», а от простого суммирования депрессивных эффектов данных факторов».

Косвенным образом это подтверждается и тем, что к общепризнанным сенсибилизаторам относятся соединения различные по своему химическому свойству. Но есть что-то общее, что объединяет фотодинамические вещества. Это — способность, действуя при определенной концентрации, повышать чувствительность клетки к лучам не вызывая при этом самостоятельно резких изменений в ней не приводя большое число клеток к гибели. С этой точки зрения истинным сенсибилизатором будет то вещество, которое дает максимальную разницу между числом выражающим смертность клеток при комбинированном действии и числом указывающим на гибель клеток от влияния самого раствора вещества. От наиболее же совершенного фотодинамического вещества необходимо ожидать почти полное отсутствие от действия его самого не только некробиотических, но и депрессивных изменений в клетке, и, с другой стороны, высокий процент гибели клеток при комбинированном действии. Повидимому в этом смысле и можно говорить о специфичности сенсибилизаторов, о веществе эффект действия которого не есть результат простого сложения двух факторов. В этом скрытом эффекте, в этом проявлении новых приобретенных под влиянием фотодинамического вещества свойствах клетки и заключается сущность сенсибилизации. Внешний фактор как бы преломляясь приводит к возникновению нового внутреннего, действие которого проявляется с значительной силой в момент освещения, что приводит клетку к гибели.

Общепризнано, что бактерий труднее сенсибилизировать к свету чем простейших с более сложной организацией. Дрожжи, согласно нашим

опытам, занимают в этом отношении среднее место. Их возможно сделать с помощью красок более чувствительными к Рентгеновским лучам, но не в такой мере, как это удавалось ряду авторов по отношению к простейшим. Повидимому только своеобразием объекта можно объяснить, что одни и те же краски для одних организмов являются активными фотодинамическими агентами, на других же влияние оказываемое ими значительно слабее.

На основании произведенных нами опытов мы пришли к следующим выводам:

1) Исследованные краски обладают по отношению к дрожжам различной токсичностью.

2) В клетках от действия красок наступают изменения, в которых могут быть наблюдаемы установленные ранее Г. А. Надсоном три фазы: возбуждения, угнетения и некробиоза.

3) Между степенью депрессивных и некробиотических изменений в клетках и токсичностью существует параллелизм.

4) Комбинированное действие Рентгеновских лучей и красок дает эффект, позволяющий говорить о сенсибилизации дрожжей к Х-лучам.

5) Способность сенсибилизоровать у различных красок варьирует и флуоресценция их не имеет решающего значения.

6) Предварительное освещение раствора красок не изменяет их ядовитых свойств и их действия в комбинации с лучами.

7) Сущность сенсибилизации заключается в приобретении клеткой под влиянием фотодинамического вещества повышенной чувствительности к лучам проявляющейся во время освещения.

В заключение считаю приятным долгом выразить благодарность акад. Г. А. Надсону за руководство настоящей работой.

Из Гос. Рентгенологического института в Ленинграде
и Микробиологической лаборатории
Академии Наук СССР. 1931.

ЛИТЕРАТУРА

1. Raab. Über d. Wirkung fluorescier. Stoffe auf Infusorien. Ztschr. f. Biol., Bd. 39, 1900, S. 524.
2. Tappeiner U. Jodlbauer. Über d. Wirkung d. photodynam. Stoffe auf Protoz. u. Enzyme. Deutsch. Arch. f. Klin. med., Bd. 80, 1904, S. 427.
3. Jodlbauer. Die physiol. Wirk. d. Lichtes. Handb. d. Norm. u. Pathol. Physiol., Bd. 17, 1926.

4. Jodlbauer u. Tappeiner. Über d. Wirkung photodynam. Stoffe auf Bakterien Münch. med. Woch. 1904, № 25.
5. Tappeiner. Ergebn. d. Physiol., Bd. 8, S. 698.
6. Tappeiner. u. Jodlbauer, Arch. f. Klin. med., Bd. 82, 1905, S. 383.
7. Tappeiner u. Jodlbauer. Ibid., Bd. 85, 1905, S. 386.
8. Kudo u. Jodlbauer. Über d. Dunkelwirk. fluoresc. Stoffe auf Eiweiss u. s. w. Bioch. Ztschr., Bd. 13, 1908, S. 24.
9. Dreyer. Dermat. Ztschr., 1908, H. 10.
10. Reitz. Untersuch. mit. photodyn. Stoff. Ztbl. f. Bakt., 1 Abt., Bd. 45, 1908, S. 464.
11. Baldwin. A study of the combined action of X-rays and of vital stains upon paramaecia Biol. Bull., v. 39, 1920, p. 59.
12. Straub. Über chem. Vorg. bei d. Einwirk. v. Licht auf fluoresc. Subst. u. s. w. Münch. med. Woch., 1904, № 25.
13. Straub. Arch. f. exp. Path. u. Pharm., Bd. 51, 1904, S. 383.
14. Guilliermond. Sur la toxicité des colorants vitaux C. R. d. séances de la Soc. d. biol., T. 104, p. 468.
15. Kono. Unters. zur Frage der Vitalfärbung u. s. w. Protoplasma. Bd. 11, H. 1, 1930.
16. Trillat. Sur l'action secondaire des rayos X sur les microorganismes. C. R. hebd. d. séances d. l'Acad. d. Sciences, t. 183, № 25, 1926.
17. Peacock a. Whitby. Excitation of bacteric. fluoresc. by means of X-rays. Brit. Journ. exp. pathol., vol. 8, № 1, 1907.
18. Janagihara. Über d. bacteric. Mitwirk. d. Sonnenlichtstrahlen in der Farbstofflösung Ref. Ztbl. f. Bakt., II Abt., Bd. 62, 1924.
19. Prowazek. Biol. Ztbl., Bd. 29, 1909.
20. Nadson. Über die Primärwirkung d. Radiumstrahlen auf die lebendige Substanz. Bioch. Ztchr., Bd. 155, 1925, S. 381.
21. Nadson. Über d. Wirkung d. Radiums auf d. Hefepilze u. s. w. Ann. d. Roentg. et Radiol. Leningrad, t. 1, 1922, p. 47.
22. Nadson et Stern. De l'action des rayons ultra-violets et des rayons X sur la cellule des levures. CRAS, 1931.
23. Надсон и Жолкевич. Русск. вестн. рентген., т. III, 1924.
24. Euler u. Florell. Über d. Verhalten einiger Farbstoffe in Hefezellen Ztbl. f. Bakt., II Abt., Bd. 51, 1920, S. 407.
25. Vorhoeve (цит. по Kono).
26. Politzer. Über die Giftwirk. d. Neutralrots. Bioch. Ztschr., Bd. 151, 1924, S. 43.
27. Schepmann u. Flecke. Über. d. Einwirk. «überweicher» Rontgen-strahlen auf Bakterien. Klin. Woch. 1926, № 35.
28. Gaertner. Strahlentherapie. Bd. 22, 1926, H. 2.
29. Baensch u. Finsterbusch. Strahlentherapie, Bd. 33, 1929.
30. Bolhuis. De biolog. werking. von primaire en secundaire Röntgenstralen op bacterien. Leiden, 1925 (Diss.).
31. Passow u. Ripmann. Münch. med. Woch. Jg. 71, 1924, S. 733.
32. Mettler. Experim. u. d. bakteric. Wirk. d. Licht auf mit Eosin, Erythrosin u. s. w. Arch. f. Hygiene. Bd. 53, 1905, H. 1.

A. IMŠENECKŮ. (A. IMSCHENETZKY) ÜBER DIE KOMBINIERTE WIRKUNG DER FARBSTOFFE UND RÖNTGENSTRAHLEN AUF DIE HEFEPILZE

РЕЗЮМЕ

Die Lösung der Frage ob die Farbstoffe die Hefe sensibilisieren können, war nur nach der vorläufige Untersuchungen über die Wirkung der Farbstoffe auf die Hefepilze in Dunkel möglich. Es war festgestellt worden, dass die angewandter Farbstoffe auf die Hefe verschiedene Giftigkeit besitzen. Unter der Wirkung der Farbstoffen treten in der Hefezelle Veränderungen auf in welchen wir Phasen der Erregung, Unterdrückung und Nekrobiose beobachten können.

Bei der kombinierter Wirkung der Farbstoffe und Röntgenstrahlen war die Zahl der getötenen Zellen grösser als bei Summieren der Wirkung diesen Faktoren für sich allein. Dieser Umstand weist auf die Möglichkeit der Sensibilisierung der Hefe zu Röntgenstrahlen mit Hilfe der Farbstoffe.

Die Fähigkeit der Farbstoffe die Hefe zur Wirkung der Röntgenstrahlen zu sensibilieren steht nicht in Verbindung mit der Eigenschaft der Farbstofflösungen zu fluoreszieren und kann ohne des letzten stattfinden.

Die Natur der obererwähnter Sensibilisierung besteht darin, dass die Hefezelle unter der Wirkung photodynamischer Stoffe erhöhte Empfindlichkeit bekommt, welche erst mit dem Bestrahlung der Röntgenstrahlen vortritt.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

СКАПОЛИТ, ЦОИЗИТ И ВТОРИЧНЫЙ АЛЬБИТ ИЗ ПЕГМАТИТОВОЙ ЖИЛЫ ЛАМПИ-ВАРАКА В СЕВЕРНОЙ КАРЕЛИИ

С. М. КУРБАТОВ

(*Представлено академиком* А. Е. Ферсманом)

1. При посещении летом 1929 г. пегматитовых жил Сев. Карелии с целью сбора материала для изучения промышленно-ценных полевых шпатов мною, среди других, была осмотрена в районе Чупы пегматитовая жила, носящая название Лампи-варака. Здесь мною было обнаружено среди полевых шпатов, слагающих пегматитовую жилу, наличие скаполита, цоизита и вторичного альбита и собран материал, позволивший произвести некоторое исследование этих минералов. Результаты произведенного исследования составляют содержание настоящей заметки.

Месторождение Лампи-варака находится в 4 км к северу от поселка Чупа-пристань, почти на тропе (метров 200 к западу от нее) из Чупа-пристань на Пулонгское озеро. Оно представляет собою пегматитовую жилу, простирающуюся почти меридионально и прослеживающуюся на 150 м. Мощность жилы в южном конце достигает до 6 м, в средней части она расширяется почти до 8 м, затем начинает постепенно сужаться и в северном конце выклинивается. Падение жилы вертикальное.

За несколько лет до моего посещения жила разрабатывалась открытыми выработками на микроклин и кварц до глубины 6—8 м. Главная часть работ захватила самый южный конец жилы, причем последняя вынималась почти нацело до зальбандов; по простиранию она выработана на 30 м. Вторая небольшая выработка имеется в средней части жилы, несколько ближе к ее северному концу.

Ко времени моего посещения разработка была оставлена и все выработки залиты водой. Поэтому жила была недоступна для детального осмотра, особенно в своих более глубоких частях, и возможным оказалось только произвести наблюдение в боковых краях и в части передового забоя южной

выработки, выступающих над водой, и просмотреть материал, находящийся в отвалах и на бортах выработки.

Боковая порода, в которой включена жила, макроскопически темная, почти черная, сполна кристаллическая, равномерно зернистая, состоит из зерен белого полевого шпата, черной роговой обманки и более редкого светлозеленого пироксена. Отчетливо намечается слоистая структура.

В шлифе порода состоит из плагиоклаза, пироксена и роговой обманки; кроме того наблюдаются в редких выделениях кварц, микроклин, апатит и кальцит.

Плагиоклаз представлен лабрадором около N 50. Иногда наблюдаются зонарные кристаллы плагиоклаза с более основною центральною частью.

Пироксен в шлифе почти безцветен, неплеохроичен, с прямоугольною спайностью по {110} и отдельностью по {100}. Иногда встречается в идиоморфных кристаллах и нередко включен в роговую обманку. Угол погасания Cn_g около 45°. Все это позволяет отнести его к диаллагу.

Роговая обманка в шлифе окрашена и обладает отчетливым плеохроизмом от голубовато-зеленого до грязно-желто-зеленого. Некоторые зерна обладают ясно выраженным идиоморфизмом и шестиугольным очертанием; на них видно два направления спайности по {110} под углом около 56°. Угол погасания Cn_g около 19°. Все это позволяет заключить, что мы имеем здесь обыкновенную роговую обманку. Необходимо указать, что роговая обманка нередко включает в себе зерна пироксена и потому по времени образования моложе последнего.

Структура породы равномерно зернистая с неясно выраженной последовательностью выделения минералов. Порода в целом может быть названа амфиболовым габбро, несколько рассланцованным.

Тело жилы резко отграничено от вмещающей породы и сложено крупнокусковым пегматитом, состоящим из розового редко белого микроклин-пертита, белого плагиоклаза и молочно-белого до полупрозрачного, изредка дымчатого кварца. Часто эти минералы выделяются в чистом виде в крупных блоках. Около зальбанда пегматит становится более мелкозернистым, по преимуществу плагиоклазовым и обогащается биотитом. Последний встречается иногда в довольно крупных выделениях и приурочен по преимуществу к плагиоклазу; иногда биотит переслаивается с дымчатым кварцем. Местами центральная часть жилы несколько обогащается кварцем.

В общем тело этой жилы по своему строению и составу существенно ни чем не отличается от других пегматитовых жил этого района. Не выде-

ляется это месторождение от других пегматитовых жил района и по своим жильным минералам.[1]

На восточном борту главной разработки недалеко от края ее была найдена крупная глыба и отдельные крупные штуфы, содержащие описываемые мною скаполит, вторичный альбит и цоизит. Главную массу этой глыбы составляет белый плагиоклаз, в котором находится заметное количество биотита. Установить точно, из какой части пегматитовой жилы вынуты эти штуфы, не представилось возможным, но, по нахождению их на восточном борту разработки недалеко от края жилы и по характеру плагиоклаза, обогащенного биотитом, можно предполагать, что они должны быть приурочены к восточной зальбандовой части пегматитовой жилы.

2. Плагиоклаз, непосредственно связанный со скаполитом, молочно-белый, в краях просвечивающий, в тонких осколках прозрачный; на плоскости {001} отчетливо видна двойниковая штриховка.

Удельный вес, определенный способом пикнометра, оказался при 4° Ц $= 2.656$.

В шлифе по {010} отчетливо видно значительное количество мелких чешуек вторичной слюды, которая располагается по трещинкам спайности {001}, давая скопления на подобие жилок; в шлифе по {001} наблюдается, что вторичная слюда располагается по всей массе плагиоклаза без определенного порядка. Таким образом, образование вторичной слюды идет совершенно определенно по направлению трещинок спайности по {001}.

В шлифе наблюдаются также очень редкие антипертитовые вростки микроклина, но количество их совершенно ничтожно по сравнению с количеством вторичной слюды. Никаких других включений в шлифах плагиоклаза не наблюдается.

При определении на Федоровском столике шлифа по {010} получены следующие результаты: $2V = -85^\circ$, $Pn_g = 76^\circ$, $Pn_m = 14^\circ$ и $Pn_p = 88^\circ$; угол погасания относительно трещин спайности по {001} около 0°. Все эти данные соответствуют плагиоклазу около N 30.

Для химического анализа плагиоклаз был отобран с помощью бинокулярной лупы, причем брались только прозрачные осколки, не содержащие никаких включений и загрязнений. Анализ был произведен мною в химической лаборатории минералогического кабинета Ленингр. Гос. университета, причем как в данном случае, так и в последующих анализах приме-

[1] П. А. Борисов. К вопросу о пегматитовых жилах западного Беломорья. Тр. Инст. по изучению Севера, в. 33, 1926. — А. Н. Лабунцов. К минералогии Сев. Карелии. Изв. Акад. Наук СССР, 1927, стр. 609. — А. Е. Ферсман. Пегматиты. Тр. СОПС Ак. Наук, 1931, стр. 117, 499.

нялся метод анализа силикатов, предложенный Гиллебрандом;[1] для определения щелочей силикат разлагался с помощью HF и H_2SO_4 по Берцелиусу. Результаты анализа приведены в табл. 1. В графе 1 приводятся результаты, полученные анализом; в графе 2 — результаты вычисления альбита по определенному анализом содержанию Na_2O; в графе 3 — результаты вычисления анортита по CaO; в графе 4 — результаты вычисления серицита состава $K_2O.\ 2H_2O.\ 3Al_2O_3.\ 6SiO_2$ по определенному анализом K_2O; в графе 5 дается общее содержание окислов в вычисленном альбите, анортите и сериците. Весь K_2O отнесен таким образом к слюде, что не вполне отвечает действительности, так как в шлифе наблюдалось некоторое количество микроклина. Но, ввиду трудности подсчета в шлифе содержания микроклина, пришлось пойти на такой пересчет, имея в виду, что при весьма малом, судя по шлифу количестве микроклина по сравнению со

Таблица 1

	1	2	3	4	5
SiO_2	60.88	46.92	12.42	1.34	60.68
TiO_2	нет	—	—	—	—
Al_2O_3	24.71	13.32	10.55	1.14	25.01
Fe_2O_3	0.15	—	—	—	—
CaO	5.78	—	5.78	—	5.78
MnO	нет	—	—	—	—
MgO	сл.	—	—	—	—
K_2O	0.35	—	—	0.35	0.35
Na_2O	8.06	8.06	—	—	8.06
Пот. при прок.	0.35	—	—	—	—
H_2O	не опр.	—	—	0.14	0.14
Сумма	100.29	68.30	28.75	2.97	100.02

[1] В. Ф. Гиллебранд. Химия силикатов, 2-е изд., Лгр., 1929.

слюдой, допущенная ошибка будет незначительной. Сравнивая цифры содержания SiO_2 и Al_2O_3, полученные анализом и пересчетом (графы 1 и 5 табл. 1), мы видим в анализе превышение SiO_2 и недостаток Al_2O_3. Пересчет некоторого количества K_2O на микроклин уменьшил бы несколько это расхождение, так как при этом увеличилась бы цифра содержания вычисленного SiO_2 и уменьшилась цифра содержания вычисленного Al_2O_3. Отбрасывая слюду, Fe_2O_3 и остаток потери при прокаливании и перечисляя содержание альбита и анортита на сто, мы получаем для плагиоклаза состав, приведенный в табл. 2.

Таблица 2

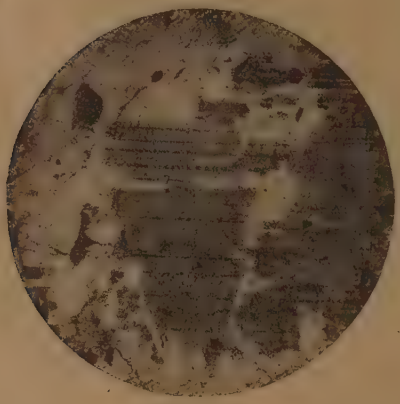
	Ab.	An.	Plg.
SiO_2	48.35	12.80	61.15
Al_2O_3	13.73	10.87	24.60
CaO	—	5.95	5.95
Na_2O	8.30	—	8.30
Сумма . . .	70.38	29.62	100.00

Таким образом, химический анализ в соответствии с данными, полученными при микроскопическом исследовании, приводит также к плагиоклазу около N 30.

3. К такому плагиоклазу приурочено образование и скопление скаполита. Последний проникает местами плагиоклаз в разных неопределенных направлениях в виде жилок, образуя скопления внутри плагиоклаза, причем резкой границы между скаполитом и плагиоклазом не замечается. В этих скоплениях иногда заметна тонко шестоватая структура скаполита. Цвет его здесь светлый восково-желтый. В шлифах, изготовленных поперек линии контакта скаполита и плагиоклаза, совершенно отчетливо наблюдается, что скаполит возникает за счет плагиоклаза, образуя по нему псевдоморфозу. В скаполите сохранилось много остатков плагиоклаза, причем видно, как некоторые неделимые последнего лишь частично превратились в скаполит, который гребенчато внедряется в плагиоклаз. Местами видно, как отдельные крупные зерна плагиоклаза разбиваются внедряю-

щимся в него скаполитом на отдельные участки, причем в последних сохраняется общее направление спайности и двойниковых полосок (фиг. 1).

В плагиоклазе много серицита, иногда в довольно крупных чешуйках; видно, что, при превращении плагиоклаза в скаполит, серицит остается неизмененным; скаполит, съедая плагиоклаз, постепенно облекает чешуйки серицита и, наконец, включает их в себя. Судя по этому, можно предполагать, что образование скаполита происходит позже образования серицита из плагиоклаза.



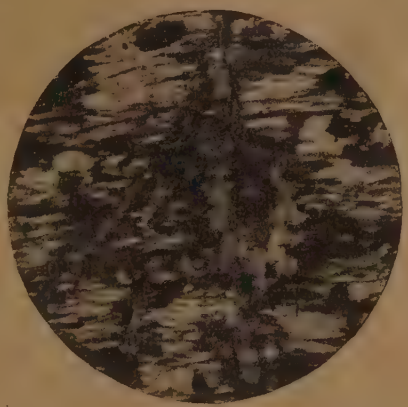
Фиг. 1. Псевдоморфоза скаполита по плагиоклазу. Николи перекрещены. Линейное увеличение в 15 раз.

Среди плагиоклаза и скаполита изредка наблюдаются мелкие чешуйки биотита, почти полностью измененные в серицит и хлорит.

Местами скаполит полностью вытесняет плагиоклаз и образует значительные скопления в виде неправильного крупно-шестоватого аггрегата; в последнем иногда намечается лучистое расположение кристаллов скаполита. Отдельные кристаллы вытянуты по оси c и достигают в этом направлении иногда до 8 см; в этих случаях по оси a кристаллы достигают 2 см. Кристаллографически они образованы весьма несовершенно и не обнаруживают пирамидальных форм. Цвет их светлый восково-желтый с определенно выраженным розоватым оттенком; часто этот розовый оттенок настолько усиливается, что приходится говорить о чисто розовом цвете. Аггрегат не представляет собою компактной массы и между отдельными кристаллами и их группами находятся мелкие пустоты, которые содержат в некотором количестве выделения мелко-чешуйчатого серебристо-белого серицита и зеленого очень тонко-чешуйчатого, в массе почти плотного, хлорита.

В шлифе, приготовленном из отдельного кристалла скаполита параллельно его длинной оси, обнаруживается следующее. Кристалл разбит очень тонкими трещинами спайности по длинному направлению. Кроме того наблюдается довольно много трещинок, которые идут преимущественно в направлении близком к перпендикулярному относительно системы трещин спайности. В направлении трещин спайности наблюдаются скопления каль-

цита и очень тонко чешуйчатого хлорита, причем отдельные чешуйки последнего собраны в мелкие звездчатые аггрегаты. Кальцит и хлорит явно приурочены друг к другу и скопления их представляются в виде тонких столбиков вытянутых параллельно спайности, причем кальцит обычно облекает хлорит. По указанным выше неправильным трещинкам идет выделение вторичного альбита, который образует сеть мелких неправильных жилок, пронизывающих всю массу скаполита; местами вторичный альбит скопляется в более значительном количестве, замещая частично собою скаполит (фиг. 2). Скаполит безцветен и обнаруживает прямое погасание, низкое двупреломление и отрицательный характер удлинения.



Фиг. 2. Образование вторичного альбита по скаполиту. Николи перекрещены. Линейное увеличение в 25 раз.

В шлифе, перпендикулярном длинной оси кристалла, наблюдается, что скаполит распадается на отдельные, приближающиеся к прямоугольным, участки, отделенные друг от друга тонкими жилками, сложенными из кальцита, хлорита и серицита. В параллельном свете скаполит является в этом сечении изотропным и дает в сходящемся свете отчетливый темный крест; оптический характер его отрицательный.

Таким образом, в шлифах совершенно отчетливо устанавливается, что скаполит, подвергаясь вторичному изменению, переходит в альбит; при этом образуется также кальцит, который скопляется вдоль вертикальных трещин спайности.

В кальците включен хлорит, который в шлифе представляется в виде очень тонких табличек и сростков их, и обнаруживает отчетливый плеохроизм — зеленый паралельно спайности и светло-желтый перпендикулярно ей; двойное лучепреломление слабое. При определении показателей преломления методом погружения установлено $n_g = 1.595$ и $n_p = 1.585$. На основании этих данных хлорит может быть отнесен к группе клинохлора; образование его вероятно связано с изменением биотита.

Из наиболее светлого и свежего кристалла скаполита была приготовлена полированная пластинка параллельно длинной оси его, с помощью

которой на рефрактометре Аббе-Пульфриха были определены в натровом свете показатели преломления $n_g = 1.539$ и $n_p = 1.546$; отсюда вычисляется $n_g - n_p = 0.007$.

Для определения удельного веса и для химического анализа материал был отобран с помощью бинокулярной лупы, причем отбирались осколки с наименее интенсивно выявленным розовым оттенком, свежие и внешне не содержащие посторонних включений. Однако, несмотря на всю тщательность отборки, нельзя ручаться за полную чистоту отобранного материала, так как в скаполите присутствуют микроскопические включения альбита, кальцита, хлорита и серицита.

Удельный вес отобранного материала, определенный методом пикнометра, оказался при 4° Ц равным 2.496.

Химический анализ отобранного материала был произведен мною в химической лаборатории минералогического кабинета Ленинградского университета; П. М. Андроновым были сделаны по моей просьбе определения H_2O, CO_2 и Cl. Содержание CO_2 определялось двояко — общее содержание CO_2 было определено одновременно с прямым определением воды и кроме того было определено количество CO_2, выделяющейся при действии HCl. Прямое определение воды было выполнено в аппарате Гуча по способу, предложенному Гиллебрандом, но с некоторыми изменениями, позволившими одновременно произвести определение общего количества CO_2. Для этого навеска перемешивалась с предварительно сплавленной и измельченной окисью свинца и смесь помещалась в аппарат Гуча, где подвергалась нагреванию. Для поглощения могущих выделиться Cl и SO_3 между аппаратом Гуча и поглотителем воды (шариковый аппарат с H_2SO_4) подвешивалась стеклянная трубчатая электрическая печь, внутри которой помещалась окись и перекись свинца в стеклянной вате; во время опыта температура трубки поддерживалась в пределах 230—280°. За шариковым аппаратом с H_2SO_4 для улавливания H_2O был помещен второй шариковый аппарат с KOH для поглащения CO_2. Хлор определялся сплавлением навески с водой; растворенный в воде сплав подкислялся HNO_3 на холоду, после чего в прозрачном растворе осаждалось AgCl и далее определение велось обычным весовым способом.

Химический анализ дал следующие результы:

SiO_2	55.33
TiO_2	нет
Al_2O_3	22.11
Fe_2O_3	0.11
CaO	5.62

MnO	нет
MgO	0.39
K_2O	0.56
Na_2O	9.79
H_2O	3.40
Cl	1.77
SO_3	0.47
CO_2	1.64
Сумма	101.19
Вычет $O = Cl_2$	0.40
	100.79
Пот. при прок.	6.33
CO_2	0.78

Вычисление анализа было произведено следующим порядком (результаты вычисления приведены в $^0/_0$ в табл. 3). 1) Весь Cl предполагался входящим в состав мариолита в виде частицы NaCl и по хлору вычислено количество связанного с ним натрия (и отсюда Na_2O). 2) Весь SO_3 предполагался входящим в состав мариолита в виде частицы Na_2SO_4 и по SO_3 вычислено количество связанного с ним Na_2O. 3) Остаток Na_2O предполагался входящим в состав альбитовой частицы, количество которой по нему и вычислено. 4) Вся CO_2 предполагалась связанной с CaO в виде частицы $CaCO_3$ и по ней вычислено количество $CaCO_3$ (и отсюда CaO). 5) Остаток CaO предполагался входящим в состав анортитовой частицы, количество которой по нему и вычислено. 6) По найденному ($2.92^0/_0$) NaCl вычислено количество альбитовой частицы, связанной в мариолите состава $3NaAlSi_3O_8 . NaCl$.[1] 7) По найденному ($0.83^0/_0$) Na_2SO_4 вычислено количество альбитовой частицы, связанной в мариолите состава $3NaAlSi_3O_8 . Na_2SO_4$.[1] 8) Вычитывая количество альбитовой частицы, входящей в состав хлорид мариолита и сульфат мариолита, из общей суммы, вычисленной для альбитовой частицы (графа 3), получаем количество свободного вторичного альбита. 9) По вычисленному количеству ($17.60^0/_0$ графа 5) анортитовой частицы, предполагая, что вся она входит в мейонит состава $3CaAl_2Si_2O_8 . CaCO_3$,[1] вычислено количество связанного $CaCO_3$ и отсюда количество мейонита. 10) Вычитывая полученное таким образом количество $CaCO_3$ из всей суммы, вычисленного по CO_2,$CaCo_3$ (графа 4), получаем количество свободного $CaCO_3$. В графе 11 приведено общее количество окислов, входящих в состав мариолита, мейонита, свободного альбита

[1] L. M. Borgström. Die chemische Zusammensetzung der Skapolithe. Zschr. Kryst., Bd. 54. 1915, S. 238. — B. Gossner u. K. Brückel. Untersuchungen über die Scapolithgruppe. N. J. f. Miner., LVIII B. B., Abt. A. 1928, S. 349.

и кальцита; в графе 12 повторены для сравнения цифры анализа; в графе 13 дана разница между числами, полученными при перечислении, и числами анализа.

Таблица 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	NaCl	Na_2SO_4	Ab. частица	$CaCO_3$ частица	An. частица	Хлорид Ma	Сульфат Ma	Свободн. Ab.	Me	Свободн. $CaCO_3$	Сумма	Анализ	Остаток
SiO_2	—	—	45.81	—	7.62	27.08	3.17	15.56	**7.62**	—	53.43	55.33	1.90
Al_2O_3	—	—	13.09	—	6.44	7.64	0.89	4.56	**6.44**	—	19.59	22.11	2.58
Fe_2O_3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.11	0.11
CaO	—	—	—	2.08	**3.54**	—	—	—	**3.54**	0.90	5.62	5.62	—
MgO	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.39	0.39
K_2O	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.56	0.56
Na_2O	1.55	0.36	**7.88**	—	—	4.64	0.55	2.69	—	—	9.79	9.79	—
H_2O	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3.40	3.40
Cl	**1.77**	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.77	1.77	—
SO_3	—	**0.47**	—	—	—	—	—	—	—	—	0.47	0.47	—
CO_2	—	—	—	**1.64**	—	—	—	—	—	0.71	1.64	1.64	—
NaCl	—	—	—	—	—	**2.92**	—	—	—	—	—	—	—
Na_2SO_4	—	—	—	—	—	—	**0.83**	—	—	—	—	—	—
$CaCO_3$	—	—	—	—	—	—	—	—	2.11	—	—	—	—
Сумма	2.92	0.83	66.78	3.72	17.60	42.28	5.44	22.81	19.71	1.61	92.25	101.19	8.94

При пересчете остались неучтенными 1.90% SiO_2, 2.55% Al_2O_3, 0.11% Fe_2O_3, 0.39% MgO, 0.56% K_2O и 3.40% H_2O. Вода в большинстве анализов скаполита, известных в литературе, приводится в довольно значительных количествах, но при расчетах формулы она обычно не принимается во внимание, и в работе Госснера и Брюккля[1], посвященной детальному изучению химического состава и строения скаполитов, авторы приходят к заключению, что вода в скаполите не входит в его конституцию и частично должна быть отнесена к примесям, находящимся в скаполите, отчасти должна быть принята за межмолекулярную, что хорошо объясняется малой плотностью молекулярной решетки скаполита. Осталь-

[1] L. c.

ные неучтенные окислы должны быть отнесены к составу серицита и хлорита, находящимся, как это указывалось выше, в заметном количестве в скаполите.

Произведенный пересчет анализа приводит нас к заключению, что в исследованном материале содержится 67.43% скаполита (причем 42.28% хлорид мариолита и 5.44% сульфат мариолита = 47.72% мариолита и 19.71% карбонат мейонита), 22.81% вторичного альбита и 1.61% вторичного кальцита (последняя цифра очень близко совпадает с данными анализа, которым было определено 0.78% CO_2, выделяющейся при действии соляной кислоты). Перечисляя состав скаполита на сто, мы имеем 70.77% мариолита (62.70% хлорид-Ма и 8.07% сульфат-Ма) и 29.23% мейонита. Для такого скаполита вычисляется теоретический состав:

SiO_2	55.83
Al_2O_3	22.07
CaO	6.96
Na_2O	10.47
Cl	2.61
SO_3	0.69
CO_2	1.37
Сумма	100.00

Сравнивая состав скаполита (70.77% Ма и 29.23% Ме) с составом плагиоклаза, за счет которого он образовался (70.38% Ab. и 29.62% An.), мы видим полное соответствие и должны заключить, что, при процессе скаполитизации плагиоклаза, последний ничего не терял из своего состава и полностью переходил в скаполит.

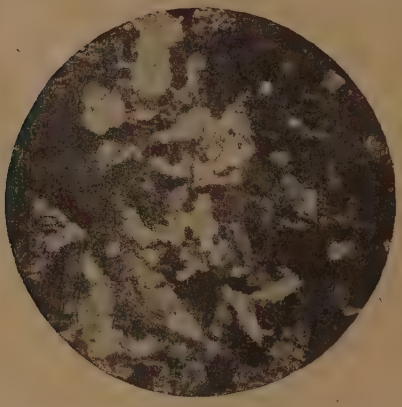
Сравнивая результаты анализа с данными о составе скаполитов из разных месторождений приводимыми в литературе,[1] можно видеть, что огромное большинство изученных скаполитов, являются гораздо более богатыми мейонитовой частицей и только немногие содержат около 70% или более мариолитовой частицы.

4. Как уже говорилось выше, розоватый оттенок, присущий всей массе скаполита, местами усиливается и отдельные кристаллы и участки иногда настолько интенсивно его проявляют, что можно говорить о розовой окраске их. При изучении таких кристаллов в шлифах, устанавливается, что они почти полностью слагаются альбитом, среди которого замечаются

[1] C. Doelter. Handbuch der Mineralchemie, Bd. II, Abt. 2, 1917, S. 1005. — Gossner u. Brückel, l. c.

лишь остатки неизмененного скаполита, так что такие ярко розовые кристаллы представляют собою почти полную псевдоморфозу альбита по скаполиту.

Иногда здесь же встречаются образования розового цвета, представляющие собою мелкозернистый аггрегат, в котором совершенно отсутствует шестоватое сложение. Масса эта сильно пориста и содержит много пустот (до 1 см в диаметре), внутрь которых выступают мелкие почти бесцветные прозрачные кристаллики до 1 мм по длинной оси. При внимательном рассмотрении в лупу и произведенным исследованием устанавливается отсутствие различия между всей массой зернистого аггрегата и выступающими в полостях ее кристалликами. При прокаливании розового вещества в тонких осколках перед паяльной трубкой оно теряет свою окраску и сплавляется в плотную белую головку.



Фиг. 3. Зернистая масса вторичного альбита. Николи перекрещены. Линейное увеличение в 25 раз.

Удельный вес, определенный способом пикнометра, оказался при 4° Ц равным 2.612.

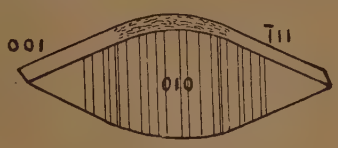
В шлифе (фиг. 3) масса оказывается совершено однородной и не содержит никаких примесей. Она представляется равномерно зернистой и состоит из зерен до 0.34 мм по длинному направлению. Часто зерна взаимно прорастают друг друга, давая вееровидные и гребенчатые сростки. Отдельные зерна часто представляют собою двойнички. При отсутствии двойниковых полосок наблюдается спайность по одному направлению. Угол погасания по отношению спайности около $+20°$; двойное лучепреломление слабое (около 0.01); угол оптических осей, определенный на федоровском столике, $+(75°—80°)$.

Показатели преломления, определенные методом погружения, оказались $n_g = 1.538$, $n_m = 1.531$ и $n_p = 1.526$.

Все эти определения показывают, что мы имеем здесь выделение альбита.

Кристаллики, выступающие в полостях, мелки (до 1 мм в длинном направлении), дурно образованы и не дают возможности произвести точное гониометрическое измерение. Однако на теодолитном отражательном гонио-

метре В. Гольдшмидта удалось установить, что они слагаются главным образом формами M — {010}, P — {001}, n — {0$\bar{2}$1} и p — {$\bar{1}$11}. Общий вид таких кристалликов схематически представлен на фиг. 4.



Фиг. 4.

Произведенный мною химический анализ материала, тщательно отобранного с помощью бинокулярной лупы (брались и отдельные кристаллики и чистые осколки зернистой массы), дал следующие результаты:

SiO_2	68.37
TiO_2	нет
Al_2O_3	19.64
Fe_2O_3	0.15
MnO	нет
CaO	0.15
MgO	нет
K_2O	0.09
Na_2O	11.21
Пот. при прок.	0.25
Сумма.	99.86

Анализ показывает, что мы имеет здесь исключительно чистый альбит, в котором анортитовая частица присутствует в количестве меньшем, чем 1%.

5. Там же, где были найдены штуфы, содержащие скаполит и альбит, был встречен один штуф с довольно значительным скоплением цоизита. Штуф представляет собою крупный спайный кусок белого микроклина, на одной поверхности которого находится выделение белого почти прозрачного зернистого кварца и около него скопления в значительном количестве цоизита; другая поверхность штуфа покрыта значительным количеством крупно-чешуйчатого серебристо-белого серицита. Судя по внешнему соотношению цоизита и микроклина, а также по шлифу, изготовленному вкрест линии соприкосновения их, можно заключить, что цоизит генетически никак не связан с микроклином и вторично отложился на последнем в пустоте из раствора, принесенного по трещине.

Цоизит образует тонко-шестоватый аггрегат, причем длина шестиков достигает до 10 см; намечается несколько вееровидное их расположение. Цвет цоизита светлый слегка розоватый; в массе аггрегат имеет светлый зеленовато-серый цвет, вследствие нахождения в нем мелко рассеянного хлорита. Никаких других примесей макроскопически в нем не наблюдается.

В шлифе, приготовленном по длине шестиков устанавливается

следующее. Отчетливая спайность идет по длинному направлению кристаллов. Показатель преломления значительно больше показателя преломления канадского бальзама. Погасание прямое; характер главной зоны положительный. Интерференционная окраска аномальная — наблюдаются характерные индигово-синие и грязно-желтые цвета. При скрещенных николях наблюдается, что кристалл распадается по линии длинной оси на отдельные зоны, отличающиеся по своей интерференционной окраске — чередуются зоны с индигово-синей и зоны с грязно-желтой окраской, или зоны с индигово-синей окраской различной интенсивности. На Федоровском столике устанавливается, что здесь имеют место полисинтетические двойники, плоскость сростания которых параллельна {110} и двойниковая плоскость параллельна {031}. Такого типа двойники указаны для цоизита Чермаком.[1] Плоскость оптических осей перпендикулярна направлению спайности. Острая биссектрисса выходит перпендикулярно плоскости шлифа. Оптический характер положительный. Угол оптических осей около 55°. Считая, что кристаллы вытянуты по оси с и спайность располагается параллельно {010}, положение оптического эллипсоида определяется следующим образом: $n_g \parallel a$, $n_m \parallel c$ и $n_p \parallel b$.

Средний показатель преломления, определенный методом погружения, оказался близким к 1.70.

Таблица 4

	% %	Мол. числа		Мол. отн.
SiO_2	39.09	0.65084		6.11
TiO_2	нет	—		
Al_2O_3	33.03	0.32401	0.33578	3.15
Fe_2O_3	1.88	0.01177		
FeO	0.23	0.00320	0.42574	4
MnO	0.18	0.00253		
CaO	23.65	0.42001		
MgO	сл.	—		
K_2O	сл.	—		
Пот. при прок.	2.38	0.13207		1.2
Сумма	100.46	—		—

[1] G. Tschermak u. L. Sipöcz. Beitrag zur Kenntniss des Zoisits. S. B. Wien. Akad., Bd. LXXXII, Abt. 1, 1881, S. 141.

Для химического анализа и для определения удельного веса материал был тщательно отобран с помощью бинокулярной лупы.

Удельный вес определялся с помощью пикнометра и оказался при 4° Ц равным 3.329.

Произведенный мною химический анализ дал результаты, приведенные в табл. 4. При пересчете этого анализа выясняется, что он очень близко отвечает принятой для цоизита формуле $3Ca\,Al_2\,Si_2O_8 . Ca(OH)_2$, причем незначительная часть CaO замещена FeO и MnO и часть Al_2O_3 замещена Fe_2O_3; Al_2O_3 относится к Fe_2O_3 как 27 : 1.

6. Произведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

В пегматитовой жиле Лампи-варака имел место процесс преобразования плагиоклаза в скаполит, причем последний вначале давал псевдоморфозы по плагиоклазу, а затем, перекристаллизовываясь, давал крупные кристаллические выделения до 8 см в длину.

Обычно образование скаполита приурочено к контактам кислых интрузивных пород с известняками, причем скаполит образуется или в известняке вблизи непосредственного контакта или в эндоконтактовой зоне за счет преобразования плагиоклазов изверженной породы. В литературе указываются немногочисленные случаи образования скаполита в пегматитовых жилах, но и здесь явление это обычно приурочено к контактам их преимущественно с карбонатными породами. Ферсман,[1] перечисляя минералы пегматитовых жил, говорит, что скаполит очень редок в пегматитах чистой линии и обычно встречается, как продукт вторичного изменения в контактных. В пегматитах чистой линии образование скаполита связано с некоторыми весьма редкими явлениями и может иметь место при автопневматолизе в фазы F и G в случае обилия Cl и CO_2.

Вблизи пегматитовой жилы Лампи-варака наличие карбонатных пород не установлено и тело жилы резко отграничено от вмещающей породы, почему вряд ли возможно предполагать наличие здесь контактного взаимодействия между ними. Поэтому наиболее естественным является предположение, что в Лампи-варака мы имеем случай превращения плагиоклаза, слагающего тело пегматитовой жилы, в скаполит под влиянием автопневматолиза; подтверждением этому может служить и то обстоятельство, что соотношение между мариолитовой и мейонитовой частицами в скаполите совершенно соответствует соотношению между альбитовой и анортитовой частицами в плагиоклазе.

[1] А. Е. Ферсман. Пегматиты, т. I, 1931, стр. 256, 311 и 355.

Обращаясь к вопросу о времени превращения плагиоклаза в скаполит, можно сделать следующее предположение. Как выше было указано, образование скаполита происходило позднее образования мелкочешуйчатого серицита по трещинам спайности плагиоклаза. Серицит во всех пегматитовых жилах Сев. Карелии образуется как по плагиоклазу, слагающему тело жилы, так и по плагиоклазу пертитовых вростков микроклин пертитов. Андерсен,[1] изучая характер и генезис пертитов, указывает, что «жильный» (vein) пертит образуется при посредстве водных растворов при сравнительно низкой температуре. Поскольку серицит образуется и по вросткам «жильного» пертита, время его образования может быть приурочено не ранее как к последним моментам пневматолитического этапа и началу гидротермального этапа. Поэтому скаполит образуется вероятно или в самом конце фазы G или в начале фазы H при температурах около 400° (по Ферсману).

В последующие стадии гидротермального процесса скаполит подвергся дальнейшему превращению и за счет его образовались альбит, кальцит и цоизит.

Альбит в начале дает псевдоморфозу по скаполиту, а затем подвергается вторичной перекристаллизации и образует зернистую пористую массу, в пустотах которой выделяются отдельные кристаллики альбита.

В литературе указываются случаи образования псевдоморфоз альбита по скаполиту. Так уже в 1853 г. Шеерер[2] описал псевдоморфозу альбита по скаполиту из Снарум в Норвегии. В. М. Гольдшмидт,[3] описывая многочисленные месторождения скаполита в Норвегии, указывает, что в некоторых случаях трудно найти свежий скаполит и вместо него встречаются окрашенные в розовый цвет псевдоморфозы альбита по скаполиту; нередко вместе с ними встречаются скопления эпидота, который Гольдшмидт считает новообразованием за счет мейонитовой частицы скаполита.

Вторично перекристаллизованный альбит из Лампи-варака по внешнему виду и в шлифе очень напоминает альбит из пегматитовых жил южной Норвегии, описанный Андерсеном[4] под именем клевеландита.

У меня не имеется данных, чтобы говорить сколько-нибудь определенно об образовании цоизита. Не исключается возможность образования его непосредственно за счет плагиоклаза. Но ни в одном шлифе не было встре-

[1] O. Andersen. The genesis of some types of feldspar from granite pegmatites. Norsk Geol. Tidskr., Bd. X, H. 1—2, 1928, 116.

[2] Th. Scheerer. Über Pseudomorphosen nebst Beiträgen zur Charakteristik einiger Arten derselben. Pogg. Annalen, Bd. 89, 1853, S. 1.

[3] V. M. Goldschmidt. Die Kontaktmetamorphose in Kristianiagebiet, 1911, S. 309.

[4] L. c., S. 171.

чено случая замещения цоизитом плагиоклаза. Поэтому наиболее достоверным можно считать, что цоизит образовался при разрушении скаполита за счет мейонитовой частицы, аналогично образованию эпидита у Гольдшмидта, и растворами был вынесен и отложен по трещинам среди микроклина. Скопление его происходило вероятно одновременно со скоплением серицита, вторично перекристаллизованного из мелко чешуйчатых выделений среди плагиоклаза и скаполита, в виде более крупных серебристо-белых чешуек.

Таким образом, образование вторичного альбита, кальцита и цоизита происходило одновременно и должно быть отнесено ко второй половине гидротермальной фазы Н, т. е. в пределах температур 350—250°.

Необходимо отметить, что и в других пегматитовых жилах Сев. Карелии известны случаи нахождения вторичного альбита. Поэтому возможно предположение, что процесс скаполитизации плагиоклазов имел более широкое распространение в пегматитовых жилах Сев. Карелии, но, вследствие малой устойчивости скаполита и легкости перехода его в альбит, это явление не было констатировано до настоящего времени.

А. Е. Ферсман описывая пегматитовые жилы Сев. Карелии, указывает, что они характеризуются слабым развитием или даже полным отсутствием пневматолитических и особенно гидротермальных выделений. Находка описанных минералов в Лампи-варака заполняет несколько этот пробел.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

CRITICAL REVIEW OF THE GENERA NEMORHAEDUS H. SMITH AND CAPRICORNIS OGILBY

By G. ADLERBERG

(*Présenté par* V. Komarov, *membre de l'Académie des Sciences*)

A great number of Gorals and Serows described by different authors as valid species and subspecies and the descriptions, in most cases unsatisfactory, based upon the study of single specimens require a careful examination of the diagnostical characters of the described forms. The majority of authors took unfortunately no notice of the extreme individual variability of external and cranial characters of the Gorals and Serows, and that is the reason why individual varieties of the same form often obtained in region situated very near to each other, have been described under different names. The Zoological Museum of the Academy of Sciences in Leningrad possesses a collection of Gorals and Serows, which though not very large, is valuable and contributes to a critical examination of the majority of forms pointed out in recent revisions as valid species and subspecies.[1]

I find it also necessary to give in the present synopsis a more completed comparative table of the cranial characters which serve to devide the Gorals and Serows into two difinitely distinct genera. As it would serve no purpose in this paper to follow in detail the secondary question of synonymy I retain the name «*Nemorhaedus*» for the Gorals and «*Capricornis*» for the Serows as the most often used at present. It must be noted, however, that the name «*Nemorhaedus*» as it seems must be left for the Serows as under this name the Sumatran Serow (H. Smith, 1827) was described the first, while for the Gorals must be appropriated the name «*Kemas*» (Ogilby, 1836) or

[1] Pocock. Proc. Zool. soc. 1908, vol. I; Lydekker. Catal. ungul. Mamm. Brit. Mus. 1913; vol. I. Pocock, Journ. Bomb. Nat. Hist. Soc., 1913, vol XXII, № 2.

«*Urotragus*» (Gray, 1871), if the first of these names cannot be adopted on account of considerations announced by Pocock (Ann. Mag. Nat. Hist., ser. 8, vol. I, 1908).

Genus Nemorhaedus

1. Maxillar bones not touching the nasals or touching them only at the anterior edge of the facial part of the lacrymal bones, the lateral edges of the nasal bones thus remaining free all along their extension.

2. Fossa lacrymalis failing.

3. The part of the brain-case situated behind the basis of the horns sloping abruptly downwards: occipital-parietal region steeply inclined towards the cranio-facial axis of the skull. The inferior edge of the condyls seen from the side is on the level with the tooth-row of the lower jaw or even more lowered.

4. The part of the brain-case situated behind the basis of the horns, comparatively short; the distance between the sagittal and lambdoidal sutures makes above 50% to the maximum breadth of the brain capsule, measured behind the basis of the horns.[1]

Genus Capricornis

1. The free edges of the maxillar bones, confining with the incisura naso-maxillaris joining the nasal bones at a certain distance from the anterior edge of the facial part of the lacrymal bones, the lateral margins of the nasal bones thus being in contact with the os maxillare on a considerable extention.

Fig. 1. Skull of *Nemorhaedus griseus* M.-Edw.

2. Fossa lacrymalis present.

3. The part of the brain-case situated behind the basis of the horns is not or but little lowered; the occipital-parietal region but little inclined towards the cranio-facial axis of the skull. The inferior margin of the condyls not reaching the teeth-row of the lower jaw, generally being on one level with the os maxillare.

4. The part of the brain-case situated behind the basis of the horns, comparatively elongated; the distance between the sagittal and lambdoidal sutures makes above 60% to the maximum bredth of the brain capsule.

[1] In our series of skulls the os parietale of all Gorals is difinitely narrowing backwards, which makes the brain-case, seen from above, to look somewhat swollen in transversal direction on the level of the joint of the processus zygomaticus to the temperal bone, thus differing from the Serows.

5. Processus nasalis ossis intermaxillaris narrowing backwards iuto a narrow projecture along the margin of the maxillar bone.

6. The distance from the basis of the horn cores to the border of the orbit is equal to, or greater than the vertical diameter of the orbit.

5. Processus nasalis ossis intermaxillaris has a more or less equal breadth on all its extension.

6. The distance from the basis of the horn cores to the border of the orbit is less than the vertical diameter of the orbit.

Fig. 2. Skull of *Capricornis crispus* Temm.

7. The height of the lower jaw between M_3 and M_2 is above 20%, the distance between the alveoles of the external incisors to the back end of the teeth-row.

7. The height of the lower jaw between M_3 and M_2 is under 20% of the distance between the alveoles of the external incisors and the back end of the teeth-row.

Genus Nemorhaedus

Naemorhedus, H. Smith, Griffith's Animal Kingdom, vol. V, p. 352, 1827, in part; Pocock Ann. Mag. Nat. Hist. ser. 8, vol. I, p. 187, 1908. *Nemorhedus*, Gray. List Mamm. Brit. Mus., p. 166, 1843. — *Kemas*, Ogilby. Proc. Zool. Soc., 1836, p. 138. *Urotragus*, Gray. Ann. Mag. Nat. Hist., ser. 4, vol. VIII, p. 372, 1871. — *Nemorhaedus*, Flower and Garson, Cat. Osteol. Mus. B. Coll. surg. pt. II, p. 254, 1884, in part. — *Cemas*, Blanford, Fauna Brit. India, Mamm., p. 516, 1891.

The Himalayan Gorals

On account of the absence of Himalayan Gorals in the Collection of the Zoological Museum, I am unable to judge about their systematical position. In his Catalogue of the ungulate mammals Lydekker following Pocock points out two species for the Himalayan Gorals: the *N. goral* Hardwicke (1825) and *N. hodgsoni*, Pocock (1900). None of the authors

gives the cranial difference of these forms. Taking into consideration the extreme individual modifications in the colouring of the other species and the indications on variations in colour of Himalayan Gorals it is easy to admit (as Pocock does it: proc Zool. Soc. 1908, p. 192) that on examining more numerous series gradations in colour may be found between the gray *N. goral* and the brown *N. hodgsoni;* if so, we should be forced to consider both these forms as but two types of individual variations of the colouration. The question about sub-species falls off, as the areals are apparently identical (in Nepal, at any rate, both these forms occur). For the Himalayan Goral a comparatively short tail is typical. The skulls, as the figure in Milne-Edwards[1] work shows, belong to the narrow type, with long and narrow nasal bones.

Nemorhaedus baileyi Pocock

Nemorhaedus baileyi, Pocock, Journ. Bombay Nat. Hist. Soc., vol. XXIII, p. 32, 1914.

The description is based on a single specimen from Tibet (Po-me). Pocock points out the colouring of the skin as different from that of *N. goral* and N. *hodgsoni;* the description of the skull failing. Without examining the individual and seasonal variations of the colouring of the skin in himalayan gorals, it is difficult to judge if the *N. baileyi* is really a valid species; it is more probable the specimen the description was based on, represents only an example of such modifications.

Nemorhaedus griseus Milne-Edwards

Antilope (Naemorhedus) griseus, M.-Edwards, Arch. Mus. Paris, vol. VII, Bull. p. 93, 1871. — *Cemas grisea*, Blanford, Fauna Brit. India, Mamm., p. 516, 1891. — *Urotragus griseus*, Lydekker, Great and small game of India, p. 140, 1900. — *Urotragus evansi*, Lydekker, Zoologist, ser. IV, vol. IX, p. 83, 1905. *Naemorhedus griseus*, Pocock, proc. Zool. Soc. 1908, p. 201. *Nemorhaedus griseus*, Lydekker, Cat. Ungul. Mamm. Brit. Mus., vol. I, p. 206, 1913.[2]

Type-locality: Province Sze-Chuan, Western China. Wide spread in Central China. Occurs in Burma.

All our specimens are obtained in Sze-Chuan.

Skull. Condylobasal length of the specimens in our series 204—217 mm. Skull lightly built. Frontal part mostly convex so that the frontal

[1] Recherches mammifères. 1879.

[2] *Nemorhaedus cinereus* M.-Edw. (Rech. Mamm., 362, 1879) is probably also a synonym for *N. griseus*, moreover the majority of forms described by Heude (Mem. conc. Hist. Nat. Emp. Chinois) as valid species must be reduced to synonymes of the same species; see the note on hese «species» at the end of this paper.

bones seen from the side are generally considerably projecting above the upper border of the orbit (the orbit comparatively low set). Nasal bones vary in length and shape, yet the length of their free edges (from the lacrymal bones to the anterior end of the nasals) always less than 55 mm. The distance between the upper edge of the occipital apperture and the crista

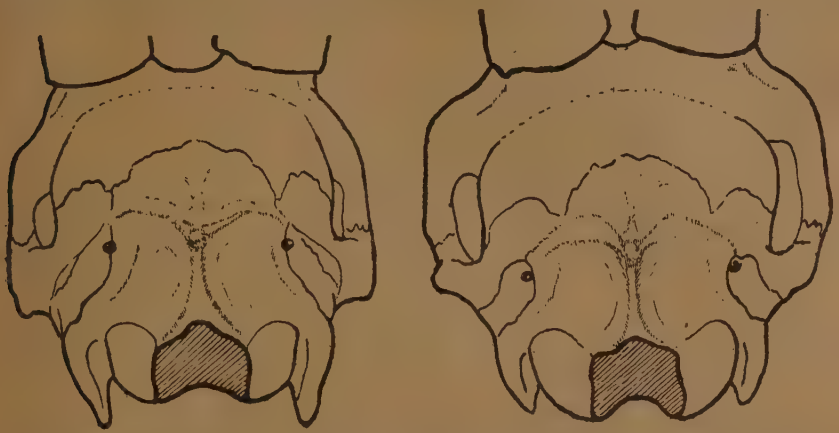


Fig. 3. Occipital regions of the sculls in *Nemorhaedus griseus* and *Nemorhaedus raddeanus* (Seen from behind).

lambdoidea makes above 50% of the breadth of os supraoccipitale, measured between foramina mastoidea.

Skin. General colour of the body grayish-auburn (between Mummy Brown pl. XV and Bister XXIX)[1] in the darker coloured specimens, and more grayish in the lighter coloured (between Wood-Broun XL and Drab XLVI) ones. The colour darkening towards the middle part of the back where a more or less distinct dark brown stripe is to be seen (Mars Brown XV — Light Seal Brown XXXIX). Towards the belly the colour usually somewhat lighter. Groins covered with yellowish white hairs (Pale Pinkish Buff XXIX — Pale Olive Buff XL). Cheeks end ears brownish gray like the flanks. Forehead and muzzle covered with darker brown hairs, ears covered inside with whitish hairs. On the throat from the lower jaw downwards there is a large light patch, mostly of a yellowish-cream tint, often having an orange shade at the margins (Orange Buff III — Pale Orange Yellow III); more seldom the colour of the throat whitish yet even then the yellowish shade remains on the margins of the patch. The colour

[1] Ridgway. Colour standards and Nomenclature. 1912.

of the upper part of the forelegs dark-brown till about the metacarpal region. The entire frontal surface of the legs in the region of the metacarpal and metatarsal bones, and to the hoofs is covered with light-yellowish hair generally of the colour of the throat patch. Tail covered with long (15 mm) dark brown hairs of the colour of the spinal stripe. Winter pelage generally thick but short. Underfur light auburn (much like the Wood Brown XL). Summer pelage has no underfur.

Nemorhaedus caudatus Milne-Edwars and Nemorhaedus raddeanus Heude

Antilope (*Caprina*) *crispa*, Radde, Reisen Ost-Sibirien, vol. I, p. 262, 1862, nec Temminck. — *Antilope* (*Naemorhedus*) *caudatus*, Milne-Edwards, Ann. Sc. Nat., sér. 5, vol. VII, p. 377, 1867. — *Urotragus caudatus*, Gray, Ann. Mag. Nat. Hist., ser. 4, vol. VIII, p. 371, 1871; *Nemorhaedus caudatus*, Sclater, Cat. Mamm. Ind. Mus., pt. II, p. 149, 1891. *Cemas caudata*, Blanford, Fauna Brit. India, Mamm., p. 516, 1891. — *Kemas raddeanus* Heude, Mém. conc. Hist. Nat. Emp. Chinois, vol. II, p. 240, 1894. — *Nemorhaedus (Kemas) caudatus raddeanus*, Trouessart, Cat. Mamm., p. 964, 1898—99. — *Naemorhedus raddeanus*, Pocock, proc. Zool. Soc. 1908, p. 196. — *Nemorhaedus raddeanus*, Lydekker, Cat. Ung. Mamm., p. 209, 1913.

Type-locality: Province Sze-Chuan in Western China? *(N. caudatus)* and the Ussuri Land *(N. raddeanus)*.

A mounted male specimen obtained by Przewalsky in S.-E. Mongolia (Syrun-Bulyk ridge) must be relegated to the form described by Milne-Edwards under the name *Antilope caudata* and pointed out for the Western Regions of Central China (Sze-Chuan) and the mountainous regions to the North of Peking.[1] General colour of this specimen sandy gray (between Tilleul Buff. XL and Pale Drab Gray XLVI). Along the back a dark brown stripe with a reddish hue. A light whitish patch on the throat with a feeble yellowish shade at the margins, continuing to the chin. Upper parts of legs of the colour of the body. The regions of a metacarpal and metatarsal bones to the hoofs of a light yellowish tint. Tail covered with long dark brown hairs. Fur rather soft and ondulated but not as long and thick as that of the Amur and Ussuri Gorals, but this is probably in connection with the season (the specimen has been obtained in June) and with the age of the animal. If we pay attention to the fact that the specimen is not perfectly adult and may be that it has faded in the show-case we shall have a complete coincidance with the description of the colouration given by Milne-Edwards,[2] who describing the Chinese Goral identifies it with our Far-

[1] Sowerby (Proc. Zool. Soc. 1917, p. 26) points out *N. caudatus* for the province Shansi and Chihli.

[2] Rech. Mamm. 1879.

Eastern Goral on the ground of the description given by Radde in his «Reisenrimr Süden von Ost-Sibirien» (1862). In this work Radde describes the Far-Eastern Goral under the name of *Antilope crispa* erroneously identifying it with the Japanese serow belonging to another genus — the *Capricornis*. Heude distinguished later the Manshurian and Amur Gorals under the specific name «*raddeanus*» from the form described by Milne-Edwards. I give here the diagnostical description of the Far-Eastern Gorals, based on a series of skulls and skins from the Ussurian and the Amur Land.

Skull. Condylobasal length 213—230 mm. Skull somewhat more massive than that of the N. griseus. Frontal region flattened. Frontal bones thus seen from the side, mostly not projecting above the upper border of the orbit (the orbit relatively high set). Ossa nasalia long, the length of their free margin (from the lacrymal bones to the anterior end of nasals) always above 55 mm. Nasal bones relatively flat, their transversal section usualy forming a slightly curved line. The distance from the superior end of the occipital apperture to the crista lambdoidea makes not above 50% to the breadth of the os supraoccipitale, measured between foramina mastoidei.

Skin. General colour of the body brownish ash-gray (between Smoke Gray XLVI and Vinaceous Buff XL). The predominance of auburn hairs sometimes makes the colouration more dark and brown. A dark brown stripe in the middle of the back. Groins covered with light whitish hair (Ivory Yellow XXX). Forehead and muzzle dark brown. Inside of the ears covered with light whitish hair. Throat-patch whitish (Ivory Yellow — XXX). Legs brown. The upper part of the forelegs covered with darker brown hair. The front surface of the legs above the hoofs dirty-whitish, sometimes intermixed with brown hairs. The light colouration of the forelegs above the hoofs usually has a tendency to continue higher than on the hindlegs occupying the area of the metacarpal bones. Tail covered with very long (to 26 cm) brown and whitish hairs, the light hairs mostly covering the sides of the tail, thus bordering its darker middle portion. Fur thick and very long. Underfur very thick (of the colour Wood-Brown XL).

Comparing the description of the Chinese Goral and the figures of skulls in the work of Milne-Edwards (Rech. Mamm., 1874) with specimens from the Amur and Ussuri Land, we can see that both forms *N. caudatus* and *N. raddeanus* differ in their cranial characters from the *N. griseus* by a flatter frontal part and in most cases by their more massive and wide skull. Milne-Fdwards points out for the *N. caudatus* shorter ossa nasalia,

than those of the *N. griseus*; while the *N. raddeanus* differs by rather long nasal bones, generally surpassing in lenght those of the *N. griseus*. Perhaps in this case we have to deal with modifications due to difference of age, as one of the *N. caudatus* skulls in Milne-Edwards' work belongs to a young, and the other to an immature specimen. As to the skin, the indication which we find by several authors (Ludekker, Pocock) on a long thick fur for the *N. caudatus* (in winter time at least) approximates it to the *N. raddeanus*. Milne-Edwards describes the throat-patch of the Chinese Gorals as yellowish white of a more yellow tint towards the verge; our specimen from the South-Eastern Mongolia shows also a very pale yellowish shade at the brim of the throat-patch. Lydekker, however, in his «Catalogue of the Ungulates of the British Museum» describing the *N. caudatus* colouration points out: «no yellow in throat-patch» thus making no difference in this respect between the Chinese species and *N. raddeanus*. Probably we have to deal here with individual variation and gradations in colouring between both forms. So much the more as in *N. griseus* for instance the degree of the development of the yellow tint in the throat-patch varies individually. We can adopt the following principale characters as most essential for distinguishing *N. caudatus* from *N. raddeanus*: a black or dark brown tail without admixture of whitish hairs, a light yellowish colouration of the inferior portion of the legs without whitish region above the hoofs, which is proper to *N. raddeanus*, and differs more or less markedly from the dark colour of the upper part of the legs. As to the first feature, we must note again, that Lydekker in the above mentioned Catalogue of Ungulates mentions for *N. caudatus*: «a narrow white fringe bordering tail below», this statement is particularly valuable as the author apparently had at his disposal a topotypical specimen; this feature, therefore, does not seem either to be constant for every form. Finally as regards the colour of the legs, Pocock[1] gives a description of 3 skins labelled «Western China», and obviously showing different variations in the colouring of the legs. Thus for a male specimen Pocock describes a dark (black) colouration of the upper part of the legs, extending downwards to the whitish area above the hoofs. The authors states that this example shows a close resemblance in colour with the specimen of a Goral from Korea. The cited description agrees perfectly with the skins of the Far-Eastern Gorals in the Collection of our Museum. The colouration of the legs of the other two specimens is described

[1] Proc. Zool. Soc., 1908, vol. I, p. 198.

by Pocock as follows: «On the foreleg the blackness scarcely extends below the knee, the blackness of the outer side of this area so noticeable in the male, being scarcely in evidence. Similarly the hind legs are yellowish brown in front below the hocks», that is the colouration of the lower part of the legs is approaching Milne-Edwards' *N. caudatus*. Pocock refers these 3 specimens to the *N. raddeanus*, though we have no other data on the distribution of Amur and Ussuri Gorals in any other locality that might be referred to as «Western China» while for the intermediary regions *N. caudatus* alone is stated. Not having at my disposal any cranial materials of the Chinese *N. caudatus*, it would be difficult for me to determine the relation between both these forms, yet on account of all the aforesaid I suggest that we have here but two subspecies of one species: the Chinese *N. caudatus caudatus* and the Amur-Manchurian *N. caudatus raddeanus*.

Nemorhaedus sp.

Locality: Japan?

In the Collection of the Zool. Museum I found a skull of a Goral labelled: «Japonia» coll. Turner ost. № 7015 (Fig. 6, c), the skin had been unfortunately destroyed. In literature we have no indications on occurence of the genus *Nemorhaedus* on the Japanese Islands, where the representative of the genus *Capricornis* is proper. The absence of a more detailed ticket obliges me to be very cautious in solution of the question of the locality of this specimen, yet the question of the distribution of the genus *Nemorhaedus* in Japan must be revised, as Gorals and Serows are often very much alike in their outward appearence, and the unsufficiency of material in the Collections of the Museums might have suggested the erroneous conclusion that all the goat-antilopes of Japan belong to one genus.

Skull. Skull of our specimen very lightly built and narrow. Frontal bones flat between the eyes and not projecting above the upper rim of the orbit. Nasal bones long and narrow. The outer surface of os lacrymale narrow and considerably long, markedly narrowed in the middle. Horns feeble, thin and short. Diameter of horn cores at their basis: 13,5 mm, diameter of the horn sheaths 17 mm (the example of *N. griseus* having the thinnest horns of the whole series of our Gorals shows the following measurements: diameter of the horn cores — 16.8 mm, diameter of the sheaths — 23 mm). The exceptionnally thin horns distinguishing this skull from all others, might be explained by incomplete development or difformity; yet

the skull itself displays no mark of any abnormal structure.[1] Beside this our specimen differs from the Far-Eastern Goral by the light shape and narrowness of its skull, and from the *N. griseus*, — by the length of its nasal bones and the flatness of its frontal part.

Genus **Capricornis**

Naemorhedus, H. Smith, Griffith's Anim. Kingdom, vol. V, p. 352, 1827, in part. — *Capricornis*, Ogilby, Proc. Zool. Soc. 1836, p. 138. — *Nemorhoedus*, Jerdon, Mamm. India, p. 283, 1867. — *Nemorhaedus*, Flower and Garson, Cat, osteol. Mus. R. Coll. Sarg. pt. II, p. 254, 1884. — *Capricornulus*, Heude, Mem. conc. Hist. Nat. Emp. Chinois, Vol IV, p. 13, 1898. — *Nemotragus*, ibid. — *Lithotragus* ibid. — *Austritragus* ibid., p. 14.

Capricornis sumatrensis Bechstein

Antilope sumatraensis, Bechstein, Übersicht vierfüss. Thiere, vol. I, p. 98, 1799. — *Antilope sumatrensis*, Shaw, Gen. Zool., vol. II, pt. 2, p. 354, 1801. — *Antilope interscapularis*, Lichtenstein, Berlin. Mag., vol. VI, p. 165, 1814. — *Antilope (Naemorhedus) sumatrensis*, H. Smith, Griffith's Anim. Kingdom, vol, V, p. 352, 1827. — *Antilope thar*, Hodgson, Gleanings in Science, vol. III, p. 324, 1831. — *Antilope bubalina*, Hodgson, Proc. Zool. Soc. 1832, p. 12. — *Antilope (Nemorhedus) thar*, Hodgson, Proc. Zool. Soc. 1834, p. 86. — *Naemorhaedus sumatrensis*, Jardine, Nat. Libr. Mamm., vol. IV, p. 97, 1836. — *Capricornis thar*, Ogilby, Proc, Zool. Soc. 1836, p. 139. — *Kemas proclivas* vel *thar*, Hodgson, Journal Asiat. Soc. Bengal, vol. X, p. 913, 1841. — *Capricornis bubalina*, Gray, List Mamm. Brit. Mus., p. 166, 1843. — *Nemorrhaedus sumatrensis* ibid. — *Nemorhaedus sumatrensis*, Cantor, Journ. Asiat. Soc. Bengal, vol. XV, p. 272, 1846. — *Capricornis sumatrensis*, Gray, Cat. Ungalata Brit. Mus., p. III, 1852. — *Capricornis rubida*, Blyth, Cat. Mamm. Mus. Asiat. Soc. Bengal, p. 174, 1863. — *Nemorhoedus bubalina*, Jerdon, Mamm. Ind., p. 283, 1867. — *Capricornis milne-edwardsi*, David, Arsh. Mus., Paris, vol. V, Bull. p. 10, 1869. — *Naemorhedus edwardsii*, David. Arsh. Mus., Paris. vol. VII, Bull. p. 90, 1871. — *Antilope (Naemorhaedus) edwardsii*, Milne-Edwards, Rech., Mamm., p. 364 1874. — *Nemorhaedus edwardsii*, Anderson, Zool. Yunnan. Exped., p. 335. 1878. — *Nemorhedus rubida*, ibid, p. 336; *Nemorhedus bubalina*, ibid, p. 335. — *Nemorhaedus babulinus*, Flower and Garson, Cat. Ost. Mus. R. Coll. Surg., pt. II, p. 254, 1884. — *Nemorhoedus rubida*, Sterndale, Mamm. India, p. 456, 1886; *Nemorhodus edwardsii*, ibid., p. 487. — *Nemorhaedus edwar tsi* Büchner, Mélanges Biol., vol. XIII, p. 161, 1894. — *Austritragus sumatrensis*, Heude, Mém. conc. Hist. Nat. Emp. Chinois, vol. IV, p. 14, 1898. — *Nemorhaedus swettenhami*, Butler, Proc. Zool. Soc., 1900, p. 675. *Nemorhoedus khamensis*, Kozlov, Mongolia and Kham, vol. I, pt. 2, p. 454, 1906 (in russian). — *Capricornis sumatrensis*, Pocock, Proc. Zool. Soc. 1910, p. 176.[2] — *Capricornis osborni*, Andrews, Americ. Mus. Novit., № 6, 1921, p. 1.

Big Serows with a rather developed mane (in the winter pelage at least) consisting of long hairs, situated along the upper part of the neck. Condylobasal length of the skull above 270 mm.

Type locality: Sumatra.

[1] Horns similar in their light structure and weakness are represented in Heude's work (Mém. conc. Hist. Nat. Emp. Chinois, vol. 2, pl. XXXIV) on the skull of a goral from the province Chekiang in eastern China („*Kemas arnouxianus*").

[2] Above 20 forms of Serows described by Heude (Mém. conc. Hist. Nat. Emp. Chinois, 1888, 1898) as valid species must be referred to the *C. sumatrensis*; the majority of them appears to be synonymies of the *C. s. milne-edmardsi*.

Distribution: Himalaya, Tibet (its Eastern provinces at least), China (except the Northern regions), Indo-China, the Malay peninsula, Sumatra.

Capricornis sumatrensis sumatrensis Bechstein.

Antilope sumatrensis, Bechstein, Übersicht vierfüss. Thiere, vol. I, p. 98, 1799. — *Austritragus sumatrensis*, Heude, Mém. conc. Hist. Nat. Emp. Chinois, vol. IV, p. 14, 1898. — *Capricornis sumatraensis sumatraensis*, Pocock, Proc. Zool. Soc., 1908, p. 175. — *Capricornis sumatrensis sumatrensis*, Lydekker, Cat. Ungul. Mamm. Brit. Mus., vol. I, p. 189, 1913.

Type locality: Sumatra.

Pocock and Lydekker point out the following characteristic features for the typical form: hoary-gray tint of the mane sharply contrasting with the dark-coloured body; the absence of a sharp marked limit in the colouration of the upper and lower part of the legs; legs below the knees blackish changing into dark brown above the hoofs. Jardine[1] describes the colouration of the Sumatran Serow as dark grayish-black with a whitish mane. Two described forms from the South of the Malay peninsula: *C. sumatrensis robinsoni* (from Selangor) and *C. s. swettenhami* (Perae) differing but little from the Sumatran Serow mainly in the colouration of the mane, appear to be but individual variations of the typical Sumatran form.

Capricornis sumatrensis rubidus Blyth.

Capricornis rubida, Blyth, Cat. Mamm. Mus. Asiat. Soc. Bengal, p. 174, 1863. — *Nemorhedus rubida*, Anderson, Zool. Yunnan Exped., p. 336, 1878. — *Nemorhoedus rubida*, Sterndale, Mamm. India, p. 456, 1886. — *Nemorhaedus sumatrensis rubidus*, Lydekker, Great and Small Game of India. p. 131, 1900. — *Capricornis sumatraensis rubidus*, Pocock, Proc. Zool. Soc. 1908, p. 175. — *Capricornis sumatrensis rubidus*, Lydekker, Cat. Hume Bequest Brit. Mus., p. 25, 1913.

Type locality — Arakan.

This subspecies is characterised by a mostly reddish colouration of the whole body; along the back a dark blackish stripe seems to be usual. Blyth[2] states that two skins of a pale reddish brown colour examined by him bore a close resemblance with the *Capricornis swinhoei* from Formosa. The coloured plate given by Pocock[3] indeed bears a resemblance with our young specimen of the *C. swinhoei* from which, however, it differs by the white colouration of its chin and throat as well as by the light colour of the legs about the hoofs. The presence and development of a white tint on throat,

[1] The Nat. Library Mamm., vol. IV, p. 97, 1836, pt. II.
[2] Catal. of Mamm. and Birds of Burma, p. 47, 1875.
[3] Journ. Bomb. Nat. Hist. Soc., vol. XXII, № 2, 1913, p. 303.

dominance of a black tint on the head can be observed. Sowerby[1] has pointed out the connection of the colouration with the seasons and the presence or absence of underfur. It seems that variations in colouring have been often described as distinct species (as for instance in the case of Yunnan Serows), which variations sometimes deviated to melanism and in most cases depended upon the season of the year or upon the age of the animal. Having at hand a great number of series of skins from Southern China and the Malay Peninsula, it would be probably possible to state the gradation in colour from the Central China Serows to the Malayan forms, belonging or at any rate nearly related with the typical Sumatran race.[2]

Capricornis sumatrensis thar Hodgson

Antilope thar, Hodgson, Gleanings in Science, vol. III, p. 324, 1831. — *Antilope bubalina*, Hodgson, Proc. Zool. Soc. 1832, p. 12. — *Antilope* (*Nemorhedus*) *thar*, Hodgson, Proc, Zool. Soc. 1834, p. 86. — *Capricornis thar*, Ogilby, Proc. Zool. Soc., 1836, p. 138; *Kemas proclivus* vel *thar*, Hodgson, Journ. Asiat. Soc Bengal, vol. X, p. 913, 1841. — *Capricornis bubalina*, Gray, List Mamm. Brit. Mus., p. 166. — *Nemorhoedus bubalina*, Jerdon, Mamm. Ind., p. 283, 1867. — *Nemorhaedus bubalinus*, Flower and Garson, Cat. Osteol. Mus. R. Coll. Surg., pt. II, p. 254, 1884 — *Nemorhaedus sumatrensis bubalinus*, Lydekker, Great and Small Game of India, p. 128, 1900. — *Capricornis sumatraensis thar*, Pocock, Proc. Zool. Soc. 1908, p. 176. — *Capricornis sumatraensis humei*, ibid., p. 178 — *Capricornis sumatraensis rodoni*, ibid, 175. — *Capricornis sumatraensis jamrachi*, ibid., p. 175. — *Capricornis thar jamrachi*, Pocock, Proc. Zool. Soc., 1910, p. 855. — *Nemorhaedus sumatraensis jamrachi*, Ward, Records of Big Game, ed. 6, p. 346, 1910; *Nemorhaedus sumatrensis humei*, ibid. — *Nemorhaedus sumatrensis rodoni*, ibid. — *Capricornis sumatrensis bubalinus*, Lydekker, Cat. Hume Bequest Brit. Mus., p. 23, 1913; *Capricornis sumatrensis humei*, ibid, p. 24. — *Capricornis sumatrensis jamrachi*, Lydekker, Cat. Ungul. Mamm. Brit. Mus., vol. I, 191. — *Capricornis sumatrensis tahr*, ibid., p. 193. — *Capricornis sumatrensis rodoni*, ibid., p. 195.

Type locality: Nepal.

The Himalayan Serows were relegated by Pocock to the species *C. sumatrensis*. He distinguished 4 subspecies in Himalaya: *C. s. thar*, *C. s. jamrachi* (type locality: Kalimpong), *C. s. humei* (Kashmir), *C. s. rodoni* (Chamba). Yet Stockley[3] having collected a series of Serows from the neighbouring regions proved these forms to be but individual variations in colouring of the Hodgson's *Capricornis thar* (or *C. sumatrensis thar*). Indications on short fur without underfur for the *C. s. thar* and *C. s. jamrachi* distinguish these forms from all other Serows. It is hardly probable, however that there should exist in the Himalaya Mountains two forms differing only as to the presence or absence of underfur.

[1] Proc. Zool. Soc., 1917, p. 21.

[2] I had no possibility to give an insight of the description of *C. sumatrensis annectens* Kloss (1919), from S.W. Siam.

[3] Journ. Bombay Nat. Hist. Soc., vol. XXIX, № 3, p. 824, 1923.

This last feature is doubtlessly the result of seasonal changes as in the case of the Chinese Serows.[1] The terms of moulting may depend upon climatic conditions of different localities. Examples in Zoo-parks cannot be considered as trustworthy material for the solution of this question, as in captivity, in absolutely different climatic conditions declinations from normal moulting may occur.

Therefore we may consider it as settled that in the Himalaya Mountain we have but one form: *C. sumatrensis thar* differing from the East-Tibetian and Chinese *C. s. milne-edwardsi* by a weaker development or entire absence of the reddish shade towards the legs, and a whitish or yellowish gray colouration of the inferior part of the legs above the hoofs. The skulls of the Himalayan Serows do not seem to reach as large dimensions as in many specimens of the Tibet-Chinese race. Gradations must doubtless exist between both forms (for instance in colouration of the legs).

The pelage of our specimen from Sikkim is covered with short hair; there is no date on the ticket, but the scanty fur and the absence of the underfur, leave no doubt that in conditions of the mountainous Himalayan climate only a summer pelage might be of that nature. As to the general tint of the body our specimen approaches the *C. sumatrensis milne-edwardsi.* Along the back there is a scarcely traceable dark stripe. The mane is almost absent and substituted only by somewhat longer black hair along the upper part of the neck. Head and neck brownish-black. Upper part of the forelegs to the knees covered with dark hair of the colour of the flanks. Lower part of the forelegs, from the knees to the hoofs of a dirty yellowish whitish tint (Ivory Yellow XXX — Pinkish Buff XXIX). From the thighs downwards the colour gets a reddish-brown shade. The colouration of the metacarpal bones region is a light one, of the colour ef the inferior part of the forelegs. Groins covered with light yellowish hair. Skull not showing any essential difference from our *C. sumatrensis milne-edwardsi;* only a somewhat shorter facial part and a stronger incline of the nasal surface might be pointed out.

Capricornis argyrochaetes Heude

Capricornis argyrochaetes, Heude, Mém. conc. Hist. Nat. Emp. Chinois, vol. II, p. 4, note, 1888, ibid., p. 228, 1894. — *Nemotragus argyrochaetes*, Heude, ibid., vol. IV, p. 13, 1898.— *Nemorhaedus argyrochaetes*, Lydekker, Proc. Zool. Soc., 1905, vol. II, p. 329. — *Capricornis sumatraensis argyrochaetes*, Pocock, Proc. Zool. Soc., 1908, p 175.

Type locality: Province Che-Kiang in Eastern China.

[1] See Sowerby, Proc. Zool. Soc., 1917, p. 21

The female specimen found by me in the serie of Serows obtained by the expedition of P. Kozlov in East. Tibet (Kham) as to its cranial and external characters coincides with Heude's description of *Capricornis argyrochaetes*. The skull of this specimen is narrow and long. The dimensions of the skull are those of *C. sumatrensis milne-edwardsi*. Nasal bones long and narrow. Os basi-occipitale rather nerrow slightly and gradually widening towards the occipital apperture. The short teeth-row is doubtless but an individual particular. (A shortening of the teeth-row is often met in the Gorals as well as in the Serows).

Skin. General tint of colouration whitish-gray (between Smoke-Gray XLVI and Tilleul-Buff XL). Along the back, running down from the mane to the tail there is a blackish-brown stripe. General tint of the colouration of the mane grayish-brownish; the hairs constituting the mane have a white and brownish shade. The character of the colouration of the head is like that of the *C. s. milne-edwardsi;* the colouration of the forehead is somewhat lighter due to an admixture of yellowish hair. The light stripes along each side of the upper jaw are yellowish (Maize-Yellow IV), and more developed than those of our *C. s. milne-edwardsi*. Legs reddish fawn without admixture of dark hairs. Underfur rather thick, of a whitish tint. The colouration of our specimen agrees with the description of Heude and generally also with the coloured plate given by Lydekker.[1] Therefore we must come to the conclusion that in respect of the cranial characters no essential difference exists between the *C. argyrochaetes* and *C. s. milne-edwardsi*. The occurence of large individual variations for single specimens is to be stated for both these forms. A small (in comparison with the length of the skull) zygomatic breadth entirely coincides with the descriptions by Heude and Lyddeker[2] though the last author in another place,[3] comparing a not quite adult specimen with the Himalayan Serow, describes the skull of the *C. argyrochaetes* as one of «a comparatively wider, higher and shorter type». Allen[3] indicates for the skull of *C. argyrochaetes* a greater width of the nasal bones. Finally we meet narrow skull with long and narrow nasal bones also in *C. s. milne-edwardsi*, where there is besides a whole series of gradations from the long and narrow to the wide and relatively short type.

I am quoting here the measurements of the skull of our gray serrow and of a specimen *C. s. milne-edwardsi* possessing a skull of a similar type.

[1] Proc. Zool. Soc., 1905, p. 329.
[2] Ibid., 1908, p. 940.
[3] Mem. Bull. Mus. Harvard, vol. XL, p. 202, 1912.

	The gray Tibetan specimen	*C. s. milne-edwardsi*
	mm	mm
Condylobasal length	297.4	300.7
Maximum zygomatic breadth	127.7	126.7
Length of muzzle from orbit to the anterior margin of the intermax.	181.8	179.8
Length of Nasals	105.8	109
Breadth of »	40.3	40.2
Breadth of basi-occipitale between foram. jugular.	28.9	31.4 (in another specimen: 30.5)

The table above clearly shows, that the long and narrow type of skull and nasal bones is even more distinct in the specimen of *C. s. milne-edwardsi*. Finally to prove that these peculiarities of skull structure are proper not only to the light gray Serow, it suffices to examine some of the figures in Heude's work representing the skulls of the Serows, described by him as different species, and being obviously but individual variations of the dark-coloured Chinese Serows. As to the skin, here also we must acknowledge the presence of considerable individual variations. Thus shoulders and thighs of our specimen are of the colour of the body, legs reddish-chestnut without any admixture of dark hairs; the same characters are to be seen on the coloured plate in Lydekker's work, while Heude mentions a black colouration of shoulders and thighs, and Allen[1] describes for two examples the front surface of the metacarpal region as blackish with a slight admixture of reddish hairs (several specimens of *C. s. milne-edwardsi* show a similar colouration). The colouration of the mane is varying between white and gray or fawnish. Sowerby[2] comes to the conclusion, that the colouration of the mane is subject to strong individual variations, and seems to depend more upon the age of the animal than upon the season. The dark stripe along the back of our specimen is also mentioned by Heude but fails in the description of Lydekker. This stripe is also more or less traceable in *C. s. milne-edwardsi*.

Thus the light colouration of the body appears to be the chief character distinguishing *C. argyrohaetes* from other Serows. It is worth mentioning that the rather light colouration of our specimen is to a large extent due to its thick light underfur seen through the more scanty dark hairs of the fur. Sowerby[3] who had examined Heude's collection of skins also observes

[1] Mem. Mus. Harvard Coll., vol. XL, № 4, 1912, p, 202.
[2] Proc. Zool. Soc. 1917, p. 21.
[3] Proc. Zool. Soc. 1917, pp. 21—22.

an extreme variability in the colouration of Serows, depending upon the amount of underfur; the colouration varying from «gray-buff» — if the underfur prevails upon the awn, to black in case of absence of underfur, when the skin is covered with short hairs. The colouration therefore depends upon seasonal changes in the fur-cover. Sowerby denies the existence of two species of Serows in Western China, adopting the name argyrochaetes only for Che-Kiang Serows, differing from others, according to Sowerby, by a lighter colour of the legs and a creamy-brown mane, yet any indications on such changeable characters do not seem to be persuasive, not having been verified on a more numerous material. If all Che-Kiang Serows really have the characters pointed out by Sowerby, we must acknowledge *C. argyrochaetes* as being only an East-Chinese subspecies of *C. sumatrensis.*

All the aforesaid make us wish to receive supplementary informations and descriptions, that could help to solve the question whether the gray Serows are a valid species or only a light form of the *C. sumatrensis milne-edwardsi* (possibly depending from seasonable changes in the fur-cover).

Capricornis swinhoei Gray

Capricornis swinhoii, Gray, Ann. Mag. Nat. Hist. ser. 3, vol. X, p. 320, 1862. — *Capricornis swinhoei,* Gray, Cat. Ruminants Brit. Mus., p. 21, 1872. — *Nemorhedus swinhoei,* Anderson, Zool. Yunnan. Exped., p. 336, 1878. — *Nemorhaedus swinhoei,* Blanford, Fauna Brit. India, Mamm., p. 513, 1891. — *Capricornis (Capricornulus) swinhoei,* Lydekker, Cat. Ungul. Mamm. Brit. Mus. 1913, vol. I, p. 201.

Type (and sole) locality: Formosa.

Small Serows without developed mane along the upper part of the neck. Skulls apparently even less than those of the Japanese *C. crispus.* Lydekker following Heude considers the Japanese and Formosian Serows as representatives of a separate subgenus *Capricornulus.* I do'nt see any reason for dividing the genus *Capricornis* into two subgenera; the cranial and external characters of both island forms may be adopted only as valid specific distinctions. As far as I can judge, having at my disposal only the young specimen of a Serow from Formosa in our collection, *C. swinhoei* as to cranial characters except the size of the skull is more allied to the big continental Serows, than to the Japanese *C. crispus.* In describing our specimen I must however mention that the quoted characters may to a large extent depend upon the young age of the animal (the last molars of our specimen are not yet erupted).

Fig. 5. Variations of nasal bones in *Capricornis sumatrensis milne-edwardsi* David.

Skull. Condylobasal length 187 mm. The upper line of the skull in the region of the posterior edge of Nasals straight. Nasalia short and wide, their posterior margin falls very much short of the level of the anterior rim of the orbit. At their joining the nasal bones form a convex vault (their transversal section forming an arche line). The posterior margins of the nasal bones are nearly perpendicular to the crista sagittalis. Fossa lacrymalis — slightly concave. Horn cores abruptly inclined backwards at a comparatively small angle to the fronto-parietal surface of the skull. (The last two characters are usual for all young Serows).

Skin. The colouration is uniform reddish-brown (between Auburn V and Walnut Brown XXVIII). The front part of the legs in the region of the metacarpal and metatarsal bones is of a dark-brown colour. On the throat there is a yellow patch. The colouration of our specimen is in some details different from Grey's[1] description probably because of the age of the animal.

Capricornis crispus Temminck.

Antilope crispa, Temminck, Fauna Japon., p. 56, 1840. — *Capricornis crispa*, Gray Catal. Ungul. Brit. Mus., p. 112, 1852. — *Nemorhedus crispa*, Anderson, Zool. Yunnan. Exped., p. 336, 1878. — *Nemorhaedus crispus*, Blanford, Fauna Brit. India, Mamm., p. 513, 1891. — (?) *Capricornis pryerianus*, Heude, Mém. conc. Hist. Nat. Emp. Chinois, vol. II, p. 230, 1894; *Capricornulus crispus*, ibid., vol. IV, p. 13, 1898. — (?) *Capricornulus pryerianus*, ibid. — *Capricornulus saxicola*, ibid. — *Capricornis crispus*, Pocock, Proc. Zool. Soc., 1910, p. 885; *Capricornis (Capricornulus) crispus*, Lydekker, Cat. Ungul. Mam. Brit. Mus., vol. I, p. 200, 1913.

In the collection of the Zool. Museum there is only one specimen of this species, I give its description:

Skull. Size small. Condylobasal length — 223.4. Frontal part comparatively flat. The upper line of the skull somewhat concave in the region of the posterior margins of Nasalia. Nasal bones long and narrow of a rather flattened type (the transversal section forms a slightly convex line). The posterior margins of the nasal bones nearly reach the level of the anterior rim of the orbit, The posterior edges of the nasal bones are situated at a sharp angle to the crista sagittalis. Fossa lacrymalis deep. The horn cores rather steeply raising from the fronto-partietal surface of the skull, comparatively lightly inclined backwards.

Skin. General colour brownish-gray. A dark, brown stripe along the back. Legs dark-brown (between Light Seal Brown XXXIX and Vandyke

[1] Ann. Mag. Nat. Hist., ser. 3, vol. X, p. 320, 1862; Proc. Zool. Soc. 1862, p. 263, pl. XXXV.

Brown XXVIII). Forehead, nose and ears as well as the inside surface of the ears covered with brown or reddish-brown hair (Warm-Sepia XXIX). On throat and chin the tint brightens into a whitish colour. Underfur thick, light (Tilleul-Buff XL).

Lydekker points out that the colouration of the winter-skins of *C. crispus* varies from blackish-gray to reddish-brown, the last tint is proper to the *C. pryerianus* described by Heude.[1] Lydekker refers this form to a subspecies of *C. crispus*, yet he does not give any demarcation between the areals of distribution of both these forms. Probably we have here to deal with an individual or seasonal variation of the fur-cover. Heude by the way mentions a greater length of the tail and thickness of the fur for *C. pryerianus;* from the description the conclusion seems to follow, that the mentioned author had no possibility to examine the skull of the specimen, upon which he based the description of these characters; may be Heude had to deal with the skin of a goral.[2]

NOTE ON HEUDE'S SPECIES OF GORALS AND SEROWS

In the present synopsis I did not mention the numerous species of Gorals and Serows from different regions of China described by Heude, which mostly were not taken into consideration by recent authors. It would be difficult to analyse all these «species» not being acquainted with the authentic material on which the description had been based. This work has been carried out by Sowerby[3] who has had the opportunity to examine the entire collection of Heude. For the genus *Nemorhaedus*, besides the forms mentioned in the present synopsis, Sowerby acknowledges the following species of Heude: *N. niger* (Chen-Kou-Ting), *N. henryanus* (Yi-Chang) and *N. arnouxianus* (Chekiang). As regards the first form (*N. niger*) Sowerby himself considers the question whether the specimens of Heude are different from *N. griseus* as unsolved; the *N. henryanus*, represented by Sowerby on two specimens only, can also be considered as a doubtfull form on account of the extreme variability of the mentioned characters. Sowerby gives no description for the *N. arnouxianus* represented by a single specimen from Che-Kiang. In another place Heude points out that as far as he knows it seems to be the smallest of all the forms. The geographical position of the province Che-Kiang in Eastern-China from where we have no

[1] Mém. conc. Hist. Nat. Emp. Chinois, vol. II, p. 230, 1894.
[2] See: *Nemorhaedus* sp.
[3] Proc. Zool. Soc. 1917.

other informations about Gorals obliges us to admit the possibility of the existance in this region of a particular form perhaps as a subspecies of the *N. griseus*. From the 24 species of Serows described by Heude, besides *C. argyrochaetes*, Sowerby retains 3: *C. vidianus*, *C. collasinus*, *C. rocherianus*, but even this number of authentically existing forms must be exposed to doubt. The difference in the length of the horns between the *C. vidianus* (N. E. Sze-Chuan) and *C. sumatrensis milne-edwardsi* pointed out by Sowerby, cannot be accepted as valid because of the utter unreliableness of this character much varying in different specimens. The stating of such «characters» is due exclusively to the study of insufficiently numerous series. *Capricornis collasinus* being represented by a fragment of the skull only, and a valid description failing, this form cannot be taken into consideration. 10 specimens from the province Tonkin in Southern China described by Heude as different species were referred by Sowerby to the *C. rocherianus*. Besides the smaller dimensions of the skull Sowerby mentions the black colouration of the body, and the cream-whitish legs. It is a pity this author does not indicate how many skins of this form had been examined by him. It is possible that the Tonkin Serows must be referred to a particular subspecies of the *C. sumatrensis*.

Specimens examined:

Nemorhaedus

Centr. China (Szechuan)	13
S.E. Mongolia	1
Korea, Amur- and Ussuri Land	14
Japonia ?	1

Capricornis

Sikkim (Himal.)	1
East. Tibet (Kham)	6
Sze-chuan	6
Arakan	1
Formoza	1
Japonia	1

When the present review was already in print, I received G. Allen's article[1], in which gorals and serrows collected by Andrews' Asiatic Expeditions are subjected to a systematic analysis. *C. argyrochaetes* is considered as an east-chinese subspecies of *C. sumatrensis*, which coincides with the conclusions that may be drawn out of Sowerby's Review (1917) of Heude's collections. However, the colouration of all *C. sumatrensis* being exceedingly

[1] Americ. Mus. Novitat., 1930.

variable, the indicated differences from *C. s. milne-edwardsi* seem to be very little ones. Allen describes a new subspecies from Yunnan: *C. sumatrensis montinus* (Lichiang Range, Snow Mountain). The main characters pointed out (the shallowness of the notches at the rear edge of the palate and greater width and more flaring shape of the posterior narial opening) can be scarcely recognized as subspecific characters, the same shallow cut at the

a *b* *c*

Fig. 6. *a* — *Nemorhaedus griseus* M.-Edw (from a specimen obtained in Sze-chuan). *b* — *Nemorhaedus raddeanus* Heude (from a specimen obtained in Ussuri-Land). *c* — *Nemorhaedus* sp. Japonia? (osteol. № 7015).

posterior edge of the palate, going forwards not farther than the level of the hinder border of the last molars, may be, for instance, observed in one of our specimens from Eastern Tibet. Besides, *C. s. montinus* is described as it seems from a region situated within the areal of distribution of *C. s. milne-edwardsi*. But if even these characters, according to the author correlated with the high altitude at which the serow lives, proved to be really constant and distinguishing the «*montinus*» from other serrows, it would be more correct to consider this form as a high-mountain morph or at most as a separate natio of *C. sumatrensis milne-edwardsi*. Allen refers all the

gorals examined by him (*caudatus*, *griseus*, *henryanus*) to the same species with the Himalayan *N. goral;* having no Himalayan gorals at disposal, it is difficult to judge of their relation to *N. griseus*. As regards other forms it must be pointed out that the Far-Eastern *raddeanus* and the chinese *griseus* undoubtedly belong to two distinct species; as to *N. caudatus* it would be better to postpone, until the examination of cranial materials, a definite decision whether this form ought to be joined into one species with *N. raddeanus*, or concidered nearer to *N. griseus*; judging by most descriptions, however, *N. caudatus* has in external characters much in common with the Far-Eastern goral. As to the gradations in external characters mentioned by Allen, the reference to Lydekker's identifying one skin from Szechwan with *caudatus* and three others from Western China with *raddeanus*, (if the last exceedingly vague place definition is not based upon a mistake, these specimens probably ought to be regarded as belonging to *caudatus*, which opinion is partly justified by Pocock's description), proves rather that *caudatus* and *griseus* are two distinct species. If it was acknowledged that *N. caudatus* is only a North-Chinese subspecies of *N. griseus*, specimens with intermediate characters might be expected to occur in regions situated more or less near to the limit between the areals of distribution of these two forms; whereas the existence in western provinces of China (where according to Allen only the *griseus* might be expected) of specimens undistinguished from the *caudatus* from provinces Chihli and Shansi is inconsistent with the idea of geographical races; especially as typical representatives of both races are markedly different (as they must be if *N. caudatus* is in external characters similar to *N. raddeanus*). In that case it would be easier to admit that *N. caudatus* has a wider areal of distribution and really occurs in Szechuan together with *N. griseus*. By the way, prof. Bourdelle kindly informed me that specimens brought to the Paris Museum by père David, and upon which M.-Edwards' description of *N. caudatus* is based, are obtained in Szechwan; this is probably the reason why Lydekker points out Szechwan as terra typica for *N. caudatus*. Restoring Heude's name *henryanus* for gorals from the provinces Hupeh and Fukien, Allen considers them to be a separate subspecies (*N. goral henryanus*). The given description suits very well some of our specimens from Szechwan; «henryanus» is apparently a synonym to «griseus».

Г. П. АДЛЕРБЕРГ. КРИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР РОДОВ *NEMORHAEDUS* H. SMITH и *CAPRICORNIS* OGILBY

РЕЗЮМЕ

Большое количество форм относящихся к двум резко отличающимся родам: *Nemorhaedus* и *Capricornis* и описанных в большинстве случаев по единичным экземплярам, часто из весьма близко расположенных друг к другу районов, заставляет подвергнуть критической оценке все литературные данные по этому вопросу. Небольшая, но ценная коллекция черепов и шкур в Зоологическом музее Академии Наук в Ленинграде помогает разобраться в описаниях большинства видов и подвидов, представляющих часто лишь примеры индивидуальной или сезонной изменчивости одной и той же формы.

Nemorhaedus — гималайские формы

Гималайские горалы отсутствуют в коллекциях Зоологического Музея Для обоих видов: серого *Nemorhaedus goral* Hardw. (1825) и коричневого *N. hodgsoni* Pocock (1910), ни один автор не указывает краниологических различий Для Непала указаны обе формы. Возможно, что на большом материале обнаружилось бы что обе формы представляют лишь цветовые вариации одного вида. Описанный по одному экземпляру *N. baileyi* Pocock (1914), также, весьма возможно, является лишь примером индивидуальной изменчивости.

Nemorhaedus griseus M.-Edw.

Вид широко распространенный в Центральном и Западном Китае, указан для Бурмы. Мех (зимний) плотный но относительно короткий; на горловом пятне обычно развитие желтоватой окраски, переходящей часто в оранжевую к краям пятна.

Nemorhaedus caudatus M.-Edw. и Nemorhaedus raddeanus Heude

Китайский *N. caudatus* указанный для близких к Пекину районов и пров. (Се-Чуань) и наш дальне-восточный и манджурский *N. raddeanus* повидимому представляют две близкие формы. Экземпляр Зоологического Музея (без черепа) из юго-восточн. Монголии (хребет Сырун-Булык), относящийся к описанной Мильн-Эдвардсом форме, отличается от наших дальне-восточных горалов более светлой пасчаной окраской, светлыми (желтоватыми) ногами и отсутствием светлых волос в хвосте. По литературным данным указанные признаки варьируют в отдельных случаях и быть может дают ряд переходов. Повидимому, обе формы представляют лишь два подвида одного вида: китайский *N. caudatus caudatus* и амурско-манджурский и корейский *N. caudatus raddeanus*, что должно быть проверено на краниологическом материале. Для обоих форм характерен густой и очень длинный меховой покров (по крайней мере зимний).

Nemorhaedus sp.

В коллекциях Музея имеется череп (№ 7015) горала с этикеткой «Япония» Турнер. В виду отсутствия более точных указаний надо с осторожностью относиться к вопросу о местонахождении экземпляра т. к. для Японии известен лишь представитель рода *Capricornis* (*C. crispus* Temm.).

Однако отсутствие указаний на нахождение представителей рода *Nemorhaedus* на Японских о-вах может зависеть от недостаточной изученности японской фауны, тем более что для выяснения вопроса требуется изучение краниологического материала так как представители обоих родов бывают очень сходны по внешнему облику. Ряд признаков отличает наш череп от всех других; обращают на себя внимание исключительно тонкие и слабые рога.

Genus **Capricornis**

Capricornis sumatrensis Bechst.

Крупные формы с развитой вдоль верхней части шеи гривой (по крайней мере в зимнем меху).

Capricornis sumatrensis sumatrensis Bechst.

Суматра. Повидимому к типичной суматранской расе должны быть отнесены и формы описанные с юга Малайского полуострова (*swettenhami* и *robinsoni*).

Capricornis sumatrensis rubidus Blyth.

Местонахождение: Аракан в Индо-Китае. Подвид отличающийся преобладанием красноватых тонов в окраске шкуры.

Capricornis sumatrensis milne-edwardsi David

Распространен в Восточном Тибете и Центральном Китае, указан для пров. Ю-Нань и для Бурмы. Форма с красновато-рыжей окраской ног. Окраска туловища черновато-бурая, но несомненно варьирует в отдельных случаях, преимущественно в зависимости от сезонных изменений мехового покрова.

Capricornis sumatrensis thar Hodgs.

Распространение: Гималаи. Отличается от предыдущей формы отсутствием или слабым развитием красноватой окраски на конечностях, окраска ног грязновато-белая или желтая. Все другие описанные Гималайские подвиды являются лишь примерами индивидуальной или сезонной изменчивости настоящей формы.

Capricornis argyrochaetes Heude.

Наш экземпляр из Восточного Тибета своей светлой, беловато-серой окраской вполне сходен с описаниями этой формы приведенными у Heude (1894) и Lydekker'a (1905). Изучение всей литературы и сравнение черепа нашего экземпляра с серией черепов *C. sumatrensis milne-edwardsi* приводит к выводу

о невозможности делить китайских и тибетских *Capricornis* на два различных в краниологическом отношении вида. Все указанные различия зависят от чрезвычайно сильной индивидуальной изменчивости, причем можно найти полную серию переходов между длинным и узким и широким и относительно коротким типом строения черепа и носовых костей в частности.

Окраска гривы также не является постоянным признаком. Что касается светло-серой окраски туловища, то у нашего экземпляра она в значительной степени зависит от преобладания светлого подшерстка над более темной и редкой остью; Sowerby (1917) указывает на сильные вариации в окраске шкур у китайских *Capricornis*, зависящих от сезонных изменений мехового покрова, т. е. от степени развития и соотношения подшерстка и ости. Упомянутый автор оставляет название «*argyrochaetes*» лишь для восточно-китайских *Capricornis* (пров Че-Кианг), выделяя их по признакам окраски ног и гривы, в этом случае мы должны были бы признать *C. argyrochaetes* лишь в качестве восточно-китайского подвида *C. sumatrensis*.

Во всяком случае существование в Китае и Тибете светло-серого *Capricornis* в качестве самостоятельного вида крайне сомнительно.

Capricornis swinhoei Gray (Формоза) и **Capricornis crispus** Temm. (Япония)

Мелкие *Capricornis* лишенные развитой гривы вдоль верхней части шеи. Обе формы без достаточных к тому оснований выделяются некоторыми авторами в подрод *Capricornulus*; однако *C. swinhoei* за исключением мелких размеров, в краниологическом отношении стоит повидимому ближе к крупным континентальным *Capricornis* чем к японской форме.

Китайские формы описанные Хёйде

Кроме перечисленных форм большое количество видов относящихся к обоим родам было описано Хёйде (1888, 1898) из разных районов Китая. Подавляющее большинство должно быть сведено в синонимы, представляя лишь примеры индивидуальной или сезонной изменчивости ранее описанных форм.

Возможно существование особой формы горала в Восточном Китае, в пров. Че-Кианг (*Nemorhaedus arnouxianus* Heude) быть может в качестве подвида *N. griseus*.

Из рода *Capricornis* быть может заслуживают выделения в качестве особого подвида крупного *C. sumatrensis*, формы описанные Нёude из пров. Тонкин в Индо-Китае (*Capricornis rocherianus*).

Оглавление — Sommaire

	стр.
Ф. Ю. Левинсон-Лессинг. Ф. И. Беккe. Некролог	117
Г. В. Пфейффер. Обобщение способа Jacobi-Mayer'a интегрирования нелинейных уравнений и полных систем нелинейных уравнений с частными производственными первого порядка одной неизвестной функции	131
Ю. В. Икорников. Векториальный вывод вариаций некоторых кратных интегралов, распространенных на переменную область	153
А. С. Васильев. Зенитные расстояния, получаемые на Пулковском пассажном инструменте в первом вертикале	173
А. Е. Чичибабин, Ф. В. Чириков, М. М. Кацнельсон, С. И. Корягин и Г. В. Челинцев. О кислотах кавказской нефти (с 1 фиг.)	203
А. А. Имшенецкий. О сенсибилизации дрожжей красками к Рентгеновым лучам (с 8 фиг. и резюме на немецком яз.)	225
С. М. Курбатов. Скаполит, цоизит и вторичный альбит из пегматитовой жилы Лампи-варака в Северной Карелии (с 4 фиг.)	241
Г. П. Адлерберг. Критический обзор родов *Nemorhaedus* H. Smith и *Capricornis* Ogilby (с 6 фиг. и резюме на русском яз.)	259

	pag.
***Fr. Loewinson-Lessing:** F. J. Becke. Notice nécrologique	117
***G. Pfeiffer.** Généralisation du procédé Jacobi-Mayer d'intégration d'équations non linéaires et de systèmes complets d'équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue	131
***G. Ikornikov.** Une déduction vectoriale des variations des quelques intégrales multiples, effectuées sur un domaine variable	153
***A. Vasiljev.** Distances zénithales, obtenues à l'instrument de passage de l'observatoire de Poulkovo dans la première verticale	173
***A. Čičibabin, F. Čirikov, M. Katznelson, S. Koriagin et G. Čelincev.** Sur les acides des petroles du Caucase (avec 1 fig.)	203
***A. Imšeneckij** (A. Imschenetzky). Sur la sensibilisation des levures à l'action des rayons X par le moyen de matières colorantes (avec 8 fig. et résumé en allemand)	225
***S. Kurbatov.** La scapolithe, la zoïsite et l'albite secondaire du filon de pegmatite de Lampi-varaka au Nord de la Carélie (avec 4 fig.)	241
G. Adlerberg. Critical review of the genera *Nemorhaedus* H. Smith and *Capricornis* Ogilby (with 6 fig. and a Russian résumé)	259

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 3 руб.